This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

**Usage guidelines**

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

**About Google Book Search**

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

**A propos de ce livre**

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

**Consignes d'utilisation**

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

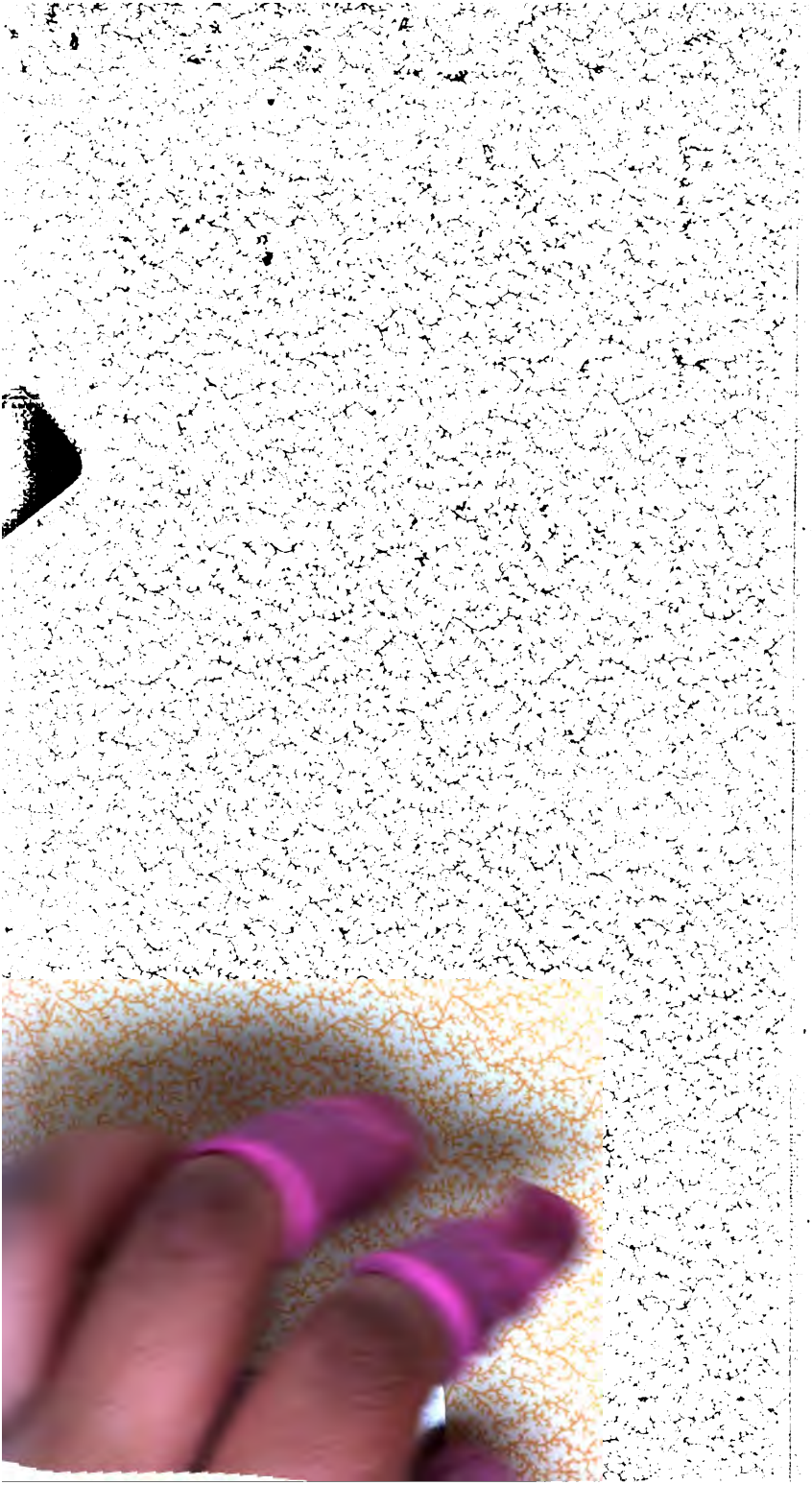
+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

**À propos du service Google Recherche de Livres**

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

NYPL RESEARCH LIBRARIES
3 3433 06642568 1



(Cancelled)

VF

# TRAITÉ

THÉORIQUE ET PRATIQUE

# DES MOTEURS

TOME SECOND

ASTOR LIBRARY
NEW-YORK.

*Se trouve aussi :*

Chez BACHELIER, libraire, quai des Augustins, 55.

CARILIAN-GOEURY et V. DALMONT, libraires, quai des Augustins, 49.

RORET, libraire, rue Hautefeuille, 10 bis.

TYPOGRAPHIE DE Ve DONDEY-DUPRÉ,
46, rue Saint-Louis, au Marais.

# TRAITÉ

## THÉORIQUE ET PRATIQUE

# DES MOTEURS

DESTINÉ A FAIRE CONNAITRE LES MOYENS D'UTILISER
TOUS LES MOTEURS CONNUS
D'APPRÉCIER LEUR TRAVAIL POSSIBLE EN TOUTE CIRCONSTANCE
ET DE LES EMPLOYER DE LA MANIÈRE LA PLUS AVANTAGEUSE POUR ÉCONOMISER
LE CAPITAL, LE TEMPS ET LA FORCE

SUIVI DE

## L'APPLICATION DES MOTEURS AUX MACHINES

PAR

**C. COURTOIS**
INGÉNIEUR EN CHEF DES PONTS ET CHAUSSÉES
Directeur du Dépôt des Cartes et Plans du Ministère des Travaux publics

---

**TOME SECOND**

SECONDE PARTIE

MOTEURS INANIMÉS

TOR LIBRARY
NEW-YORK

PARIS
LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE-INDUSTRIELLE
DE **L. Mathias** (AUGUSTIN)
15, QUAI MALAQUAIS

1850

# AVANT-PROPOS.

Je présente actuellement au public le second volume de mon *Traité sur les Moteurs;* dans ce volume, je m'occupe spécialement de l'hydraulique, qui a pour but de régler le mouvement des eaux et d'en utiliser la force.

L'hydraulique est une science encore dans l'enfance. Cependant, l'art d'utiliser le mouvement et la force des eaux était connu des anciens; en Chine et en Perse, cet art est pratiqué depuis les temps les plus reculés; les Égyptiens ont, à toute époque, ouvert des canaux d'irrigation pour augmenter la fertilité du sol; les Romains savaient conduire et distribuer les eaux dans l'intérêt de la salubrité des villes et pour les besoins des habitants. Dans des temps plus rapprochés de nous, les Italiens et les Hollandais ont fait de nombreuses applications de cet art pour assécher, assainir et arroser certaines contrées, telles que la Lombardie, le territoire de Venise et les plaines de la Hollande. Enfin, les roues et machines hydrauliques sont en usage depuis le sixième siècle; mais, comme toujours, la pratique avait précédé la

théorie, et avant l'année 1769 les questions relatives aux eaux courantes, qui sont les plus importantes de l'hydraulique, attiraient peu l'attention des savants. L'expérience des praticiens était alors la seule garantie du succès d'une entreprise ; garantie bien insuffisante quand ces praticiens devaient sortir de leur spécialité.

Daniel Bernouilli a donné le premier la solution du problème de l'écoulement des liquides, sans tenir compte toutefois de la résistance due au frottement ou au glissement sur la couche adhérente aux parois du lit, canal ou tuyau dans lequel le liquide se meut.

Chézy, à qui l'on doit les premières recherches sur la résistance due au frottement des liquides, admet que cette résistance est proportionnelle au carré de la vitesse. La formule donnée par ce savant ingénieur, que semblaient confirmer les expériences de Bossut sur le mouvement de l'eau dans les tuyaux de conduite, a cependant été abandonnée, plusieurs hydrauliciens ayant affirmé que dans la pratique elle conduisait à des résultats inexacts.

Parmi les savants qui se sont occupés d'hydraulique, aucun ne mérite autant notre reconnaissance que Dubuat ; cet ingénieur distingué doit être considéré comme le fondateur de la science : le premier il a appliqué aux eaux courantes le principe de tout mouvement uniforme, car c'est lui qui a dit : « Quand l'eau coule uniformément dans un lit quel-
» conque, la force accélératrice qui l'oblige à couler

» est égale à la somme des résistances qu'elle éprouve, » soit par sa propre viscosité, soit par le frottement » du lit. » Dubuat appelle avec raison ce principe la clef de l'hydraulique.

Les heureuses idées semées par ce savant fructifièrent sous d'habiles géomètres, tels que Coulomb, Girard, Prony; ce dernier, en déterminant par de nombreuses expériences les coefficients d'une formule proposée d'abord par Girard, a rendu un service incontestable.

Navier, en appliquant au mouvement des liquides le principe de d'Alembert et celui des forces vives, a fait de l'hydraulique une véritable science.

D'Aubuisson a ensuite publié sur l'hydraulique l'ouvrage le plus pratique et le plus complet que je connaisse.

Vauthier, dont la perte récente est si regrettable, s'était distingué en parvenant à l'équation du mouvement permanent par des considérations fort simples, et en faisant de cette équation de nombreuses et intéressantes applications.

MM. Poncelet, Bélanger et Sonnet ont publié plusieurs mémoires sur l'hydraulique ; les deux premiers ont cru reconnaître que le terme de l'équation du mouvement permanent, relatif aux forces vives du liquide, doit être affecté d'un coefficient plus grand que l'unité.

M. Morin a publié, à la fin de 1846, un ouvrage fort complet sur les moteurs hydrauliques. Enfin,

depuis 1848, on doit à M. Dupuit un ouvrage théorique et pratique sur les eaux courantes.

Venant après les savants que je viens de nommer, j'ai cherché à coordonner les éléments de la science, afin d'en déduire, par une méthode rationnelle, les cinq ou six formules dont je fais une constante application. Donner à ces formules une utilité pratique a été l'objet constant de mes efforts; car, sans cette utilité, les théories les plus séduisantes peuvent étonner notre imagination, mais elles n'ont aucun droit à notre reconnaissance.

La formule du mouvement uniforme dans les courants découverts, que j'ai obtenue d'une manière rationnelle, est à peu près celle proposée par Chézy; elle n'en diffère que par le coefficient, que les tables publiées par Prony m'ont mis à même de déterminer avec plus de précision. Cette formule, sans aucune modification, s'applique avec avantage au mouvement de l'eau dans les canaux fermés, ou dans les tuyaux de conduite, pourvu que la section de ces tuyaux ait les dimensions ordinaires de pratique, ou que leur diamètre ne soit pas extrêmement petit, et n'approche pas de la capillarité.

L'équation du mouvement permanent, qui résulte de considérations fort simples, diffère essentiellement de celles données par MM. Prony, Navier, Poncelet, Bélanger et Vautier; ces dernières, ainsi que je le démontre, ne peuvent donner des résultats aussi exacts que ceux auxquels je parviens.

Je donne l'équation de la ligne que j'appelle *ligne des résistances*, et le moyen facile de tracer cette ligne, qui est d'une importance incontestable lorsque l'on veut améliorer le régime d'une rivière ou le modifier dans un intérêt quelconque.

L'équation du mouvement permanent donne un moyen facile de déterminer avec toute la précision désirable le débit d'un courant dont le lit et la pente sont connus. Le débit devenant ainsi la conséquence d'un nivellement, permet de résoudre une foule de questions qui jusqu'alors entraînaient dans des difficultés inextricables.

La même équation donne encore la solution complète de toutes les questions relatives aux barrages, aux pertuis, aux ponts et autres obstacles qui peuvent se trouver dans le lit d'un courant. A l'aide de cette équation, il est désormais facile de tracer la courbe qu'affecte en toute circonstance la surface d'un courant en amont d'un obstacle, et même celle de cette surface au moment où le courant passe sur un barrage. Les applications nombreuses que j'ai faites font reconnaître le degré de précision avec lequel les résultats sont obtenus.

Après ce que je viens de dire, je crois inutile d'attirer l'attention sur la section de moindre résistance, sur celle relative au maximum du débit, sur le jaugeage d'un courant à son passage sur un barrage, sur le moyen facile d'obtenir par le calcul le coefficient de contraction lorsque l'eau sort par

un orifice percé dans une paroi plane et mince.

A la fin du volume que je présente, j'ai réuni, dans les tableaux nos 1 et 2, les données et les résultats qui ont servi à la détermination du coefficient qui entre dans l'équation du mouvement uniforme et dans celle de la ligne des résistances. Le tableau n° 3, qui est relatif au calcul du débit, présente les détails de l'application de la formule du mouvement permanent au Weser, à l'Elbe, à la Saône, à la Moselle. Enfin, la table n° 4 est extraite d'un ouvrage de M. Cousinery, mon ancien camarade et ami, connu depuis longtemps par plusieurs importantes publications ayant la plupart pour objet de faciliter les applications des sciences mathématiques. La table dont il s'agit, en présentant des résultats de calcul dont on a besoin souvent de faire usage lorsque l'on s'occupe d'hydraulique, épargnera le temps et la fatigue, et diminuera les chances d'erreur.

Puis-je compter que ce fruit de mes veilles attirera l'attention des personnes capables d'appliquer ce genre de connaissances? Je ne l'espère que des jeunes ingénieurs dont le courage ne voit que le but, et dont l'esprit n'est pas encore soumis au joug de l'habitude; car, je puis en juger par moi-même, dans l'âge mûr ce que l'on sait est préférable à ce qu'il faut apprendre, fût-il au fond cent fois plus facile.

Le petit nombre de ceux qui me liront, une fois entrés dans la voie que j'ai suivie, apprécieront l'extrême facilité de la méthode, et reconnaîtront

qu'elle est immédiatement applicable à des questions qui se présentent tous les jours et que l'on tranche d'une manière plus ou moins arbitraire, sans trop se préoccuper des conséquences qui peuvent en résulter.

Il me reste à désirer que ceux de mes camarades qui sont distingués par leurs lumières et leur expérience fassent connaître leur opinion sur ce travail et leurs vues sur les améliorations dont il leur paraîtrait susceptible ; ils me mettront ainsi à même de le rectifier et de l'étendre, afin qu'il devienne aussi utile que je le désire.

Paris, le 17 mai 1849.

is-
rd
au-
au
si-
allée,
sim-
rce, et
air dans
u moyen

1. L'[illegible] t précis où
objet d'attirer l'attention [illegible]
diriger les eaux [illegible] disposition de
ture, de l'industrie et [illegible] lui donne les
tant et beaucoup trop [illegible] et de la dominer
Pour donner plus d'[illegible] ait besoin de lutter
avons en vue, nous [illegible] puissance le dispense
les eaux courantes [illegible] et semble lui réserver
richesses, et que le [illegible] ppent l'intelligence.
à celles dont on [illegible] encore les moyens de
d'accroître la [illegible] matières les plus gros-
dividuel des [illegible] transport leur utilité et
Après avoir [illegible] ont des *chemins qui mar-*
générales sur la [illegible] nsidérés sous ce rapport, les
rants, nous [illegible] dre de grands services et en
nales ob[illegible] étendus. Lorsqu'un courant
[illegible] naturellement, on modère la vi-
[illegible] ou l'on augmente leur hauteur au
ages qui, convenablement établis, doi-

*I. Des courants considérés comme sources de richesses.*

2. Les cours d'eau sont des mines de richesses, d'une exploitation toujours facile et constamment à notre disposition; leurs eaux, convenablement soutenues et dérivées, peuvent accroître d'une manière prodigieuse les produits du sol. Dans les contrées sillonnées par des canaux d'arrosage, on est surpris de l'étonnante fertilité que les irrigations donnent aux terres; on remarque surtout que, lorsqu'une côte frappée perpendiculairement par les rayons du soleil est en même temps abreuvée d'eau, la végétation s'y développe avec une vigueur sans égale.

La Chine et la Perse, depuis un temps immémorial, ont su apprécier et tirer un grand parti de la propriété fécondante des irrigations.

La fertilité de la Lombardie est due en partie à des canaux d'arrosage dérivés des courants. La fertilité de la Basse-Égypte est due au limon que les débordements du Nil apportent chaque année; le barrage que l'on construit actuellement sur le cours du fleuve augmentera encore cette heureuse fécondité en permettant de multiplier les débordements et les irrigations dans les saisons convenables.

Les cours d'eau ou courants naturels nous présentent à tout instant et à peu près en tout lieu une force motrice immense qui ne coûte rien et qui se renouvelle sans cesse; une simple roue suffit pour

recevoir cette force et l'appliquer à toutes nos industries. Lorsqu'il s'agit d'utiliser la force sur le bord même du courant, son application ne présente aucune difficulté; mais, lorsqu'il faut la répartir au loin ou la distribuer entre divers établissements situés sur des hauteurs ou sur le versant d'une vallée, les procédés d'application sont un peu moins simples. La roue sert alors à *emmagasiner* la force, et même à la concentrer, en comprimant de l'air dans un réservoir; cet air se distribue ensuite au moyen de tuyaux, et fait arriver la force au point précis où elle doit être utilisée.

Les courants mettent donc à la disposition de l'homme une grande puissance qui lui donne les moyens de transformer la matière et de la dominer en toute circonstance, sans qu'il ait besoin de lutter directement avec elle; cette puissance le dispense des travaux les plus pénibles, et semble lui réserver ceux qui exercent et développent l'intelligence.

Les cours d'eau donnent encore les moyens de transporter à peu de frais les matières les plus grossières, celles qui doivent au transport leur utilité et leur valeur; les rivières sont des *chemins qui marchent*, a dit Pascal : considérés sous ce rapport, les courants peuvent rendre de grands services et en rendent déjà d'assez étendus. Lorsqu'un courant n'est pas navigable naturellement, on modère la vitesse de ses eaux ou l'on augmente leur hauteur au moyen de barrages qui, convenablement établis, doi-

vent améliorer le régime du courant et servir en même temps les intérêts de l'agriculture et ceux de l'industrie. Nous avons donc eu raison de dire que les courants sont des mines de richesses qui, convenablement exploitées, doivent concourir aux progrès de l'agriculture, de l'industrie et du commerce, et puissamment contribuer à la prospérité des nations et au bien-être des individus.

3. Cependant, les courants, dont la plupart offrent tant d'attraits aux populations qui s'établissent sur leurs bords, causent parfois de grands désastres. On en voit qui à leur origine rongent les flans des montagnes, et qui vomissent dans les plaines des monceaux de débris ; d'autres vouent à la stérilité le sol sur lequel leur course vagabonde exerce ses ravages ; enfin, quelques-uns, par l'irruption subite de leurs eaux, ruinent les propriétés, renversent les habitations, et quelquefois détruisent plusieurs communes : un courant qui est si facilement agent de production peut donc devenir agent de destruction.

Avant de songer à tirer parti des forces productrices des courants, il faut donc pouvoir se rendre maître de ces puissants moteurs, ou au moins savoir imposer des limites aux ravages qu'ils peuvent faire, aux dévastations qu'ils peuvent causer ; pour atteindre ce but, il est nécessaire d'étudier leur mode d'action, afin de se rendre compte des effets qu'ils produisent dans les différentes circonstances que présente leur cours ; avant d'entrer dans ces détails, nous nous

occuperons des vallées que suit le lit des courants et des pluies qui servent à leur alimentation.

### *II. Des vallées, des courants et des pluies.*

4. Tout dans la nature est soumis à la loi d'équilibre ; c'est par elle que s'établit l'égalité entre l'action et la réaction, que les formes et la direction des mouvements se proportionnent à l'espèce des agents et aux circonstances locales qui en modifient les efforts ; cette loi est le modérateur universel de tout mouvement ; nous la rencontrons dans la formation des vallées, dans la continuité de leur pente, dans l'établissement du lit des courants, dans les sinuosités de ce lit, dans la forme de sa section, et dans la vitesse des eaux qu'il contient.

5. Lorsque la surface du globe a reçu le relief que nous lui voyons aujourd'hui, le fond des vallées, au lieu d'être disposé suivant la pente continue qu'il présente généralement, affectait des mouvements brusques et irréguliers, lesquels donnaient lieu à une suite de lacs déversant les uns dans les autres ; on voit encore de ces suites de lacs au milieu des montagnes, et dans quelques parties de l'Amérique septentrionale.

Dans les lacs se sont amoncelés d'immenses dépôts, et leurs déversoirs, corrodés par le passage continuel des matières que charriaient les eaux, ont fini par disparaître en laissant, comme témoins de leur existence,

les gorges étroites que l'on remarque dans toutes les vallées ; les eaux des lacs, par leur évacuation, ont puissamment travaillé le sol, ils en ont régularisé la pente et achevé d'ouvrir les vallées qui s'étendent depuis les montagnes jusqu'à la mer. On trouve actuellement dans chaque vallée un cours d'eau dont le lit est creusé dans le sol qui constitue le fond de la vallée, et dont les sinuosités ont pour limites le pied des côtes ou des versants.

Les courants dont le lit sillonne le fond des principales vallées ont toujours un développement considérable; ils prennent le nom de fleuves lorsque, après avoir reçu dans l'étendue de leur cours un grand nombre d'affluents, ils versent leurs eaux dans la mer. On prendra une idée de l'importance de ces courants par le résumé suivant de la longueur développée des principaux d'entre eux :

| Noms des principaux fleuves. | Longueur développée en myriamètre | Noms des principaux fleuves. | Longueur développée en myriamètre |
|---|---|---|---|
| 1° EN AMÉRIQUE. | | 4° EN EUROPE. | |
| La rivière des Amazones. | 689 | Le Volga..... | 400 |
| Le Mississipi..... | 678 | Le Danube..... | 355 |
| La rivière de St-Laurent. | 289 | Le Rhin..... | 155 |
| | | L'Elbe..... | 133 |
| 2° EN AFRIQUE. | | La Vistule..... | 133 |
| | | La Loire..... | 111 |
| Le Nil..... | 500 | Le Tage..... | 111 |
| Le Sénégal..... | 195 | Le Rhône..... | 89 |
| | | La Seine..... | 80 |
| 3° EN ASIE. | | Le Pô..... | 80 |
| | | La Garonne..... | 75 |
| L'Euphrate..... | 382 | L'Ebre..... | 75 |
| Le Gange..... | 311 | La Tamise..... | 35 |

6. Lorsque l'on suit une grande vallée depuis son origine dans les montagnes jusqu'à la mer, on reconnaît que la pente du fond ou du thalweg, toujours très-forte vers l'origine, va sans cesse en diminuant à mesure que l'on avance vers l'embouchure. Cette diminution n'est pas uniforme et présente des irrégularités; mais, si l'on considère l'ensemble des pentes, cet ensemble régularisé donne une courbe qui s'élève vers l'origine et qui s'approche sans cesse de l'horizontale à mesure que l'on avance vers la mer. (Voir le profil de l'Yonne et de la Seine, fig. 5.)

7. Dans la même vallée on trouve, à peu de distance de l'origine, dans le lit du courant qui en suit le fond, d'abord des quartiers anguleux de rochers, puis et successivement des blocs arrondis de plus en plus petit, des cailloux roulés, et finalement des sables et des vases. Ces matières n'ont pas été déposées au hasard, et leur grosseur est partout en rapport avec la pente du fond des vallées; la vue seule d'un caillou roulé suffit pour donner une idée de la pente et de l'action des eaux à l'époque où les dépôts ont eu lieu.

Les observations qui précèdent prouvent que les vallées ont servi de lit à des courants immenses qui en ont régularisé la pente en y versant les grands dépôts qui en constituent le fond.

8. Les courants naturels que nous voyons aujourd'hui sont formés par les eaux de source, de pluies, de fontes de neige qui se réunissent dans les diffé-

rentes inégalités que présente la surface des continents. Ces inégalités, suivant leur importance, prennent le nom de *gorge*, *vallon*, *vallée* ou *bassin*.

Le lit des courants est creusé dans le sol par l'action des eaux; il est le résultat de l'équilibre entre cette action et la résistance des différents terrains qui constituent le fond des vallées. Lorsque l'action des eaux est très-puissante et le sol des montagnes peu résistant, le défaut d'équilibre produit alors d'affreux ravages dont nous donnerons une idée quand il sera question des torrents; mais avec le temps l'équilibre s'établit, le lit commence à prendre de la stabilité, les ravages diminuent et finissent par cesser.

Dans les courants ordinaires, dont l'action des eaux est moins puissante, tant que l'équilibre entre cette action et la résistance du sol n'existe pas, le lit se modifie, la section change de forme, souvent même le courant change brusquement de direction et abandonne le lit primitif. Lorsque cela arrive, il en résulte quelquefois des dommages tellement considérables qu'ils laissent de longs souvenirs dans la mémoire des hommes.

9. Les pluies qui alimentent les courants sont, comme on sait, produites par les vapeurs des mers que les variations de la température convertissent en nuages. Les nuages poussés sur les continents par les vents, attirés en grande partie par les montagnes, se groupent près de leur sommet, se condensent et se précipitent à l'état de pluie ou à l'état de neige, en

grande partie sur les versants des montagnes, et le reste sur les plaines.

10. Quand la pluie tombe sur le sol, une partie coule à sa surface et se rend directement dans les gorges, vallons ou vallées, une autre partie est absorbée par les terres et sert à la nutrition des végétaux, enfin une dernière partie pénètre dans le sol, s'insinue dans les fissures qu'il présente et sert à l'alimentation des sources qui sortent des versants de chaque vallée.

11. Les pluies qui tombent sur les pays de montagnes sont toujours très-abondantes et produisent des effets bien différents de celles qui tombent sur les pays des plaines, dont le sol est faiblement incliné sur l'horizon. Dans les pays de montagnes, la pente rapide des versants ne laisse pas à l'eau le temps de pénétrer dans le sol, une petite partie seulement s'insinue dans les fentes des rochers, parvient dans les cavités qu'ils présentent, et sert à l'entretien des sources et des nappes d'eau souterraines; mais la majeure partie est précipitée dans les gorges ou vallons dont le fond ayant moins de pente que les versants, permet aux eaux de s'y réunir et même de s'y amasser en proportion de la durée et de l'abondance des pluies. La masse de l'eau qui s'élève sur le fond des gorges est souvent assez considérable pour faire subitement irruption et donner lieu à un courant impétueux que l'on nomme *torrent*.

12. Les pluies qui tombent sur les pays de plaines

sont moins fréquentes et moins abondantes que celles des pays de montagnes : la plus grande partie des eaux qui proviennent de ces pluies pénètre dans l'intérieur du sol et sert à l'entretien des sources et des nappes d'eau qui reposent sur des bancs d'argile, et qui sont aussi retenues sous ces bancs. Les puits ordinaires et les sondages font reconnaître l'existence de ces nappes et leur profondeur. La partie des eaux pluviales qui n'a pas pénétré dans le sol et qui n'est pas absorbée par la végétation met plus ou moins de temps à se rendre directement dans le lit des courants les plus proches.

13. Les eaux de pluies qui tombent dans les pays de montagnes s'amassant rapidement dans les gorges et vallons donnent lieu à des courants animés d'une grande vitesse ; le volume d'eau que ces courants débitent arrive subitement, est alors considérable ; son passage présente toujours des intermittences, c'est-à-dire qu'il n'est jamais constant, et qu'il diminue en peu de temps au point de laisser le lit à peu près à sec.

Dans les pays de plaines, les vallées n'ont qu'une faible pente, et les pluies étant moins abondantes et moins fréquentes, leurs eaux pénètrent en grande partie dans le sol ; il en résulte que les courants qui, dans leur état ordinaire, sont alimentés par les eaux de source, ont un cours permanent, sont animés d'une faible vitesse, et que leurs crues ne peuvent arriver subitement ; le volume de leurs eaux, quoique

variable dans le cours d'une année, est constant pendant des périodes plus ou moins longues qui correspondent à différents états de permanence.

Nous diviserons donc les courants naturels en deux catégories dont la première comprendra les courants à grande vitesse et à crue subite, et la seconde les courants à faible vitesse.

### *III. Des courants à grande vitesse et à crue subite.*

14. Les torrents, les torrents rivières et les rivières torrentielles sont des courants dont la vitesse toujours très-grande est parfois excessive ; ils diffèrent par l'étendue de leur cours, leur pente et le volume de leurs eaux ; mais ces trois genres de courant ont ce caractère commun qu'ils charrient des pierres, cailloux ou graviers, et qu'ils tendent à exhausser le fond de leur lit dans certaines parties de leur cours ; de là résulte fréquemment l'impossibilité de les encaisser ou de les assujettir à couler dans un lit compris entre deux digues, car ce lit ne tarderait pas à être comblé ; on est donc obligé de laisser leur cours divaguer sur de vastes plaines que leurs dépôts frappent de stérilité. Occupons-nous d'abord des torrents.

#### (1). Des torrents.

15. Les torrents coulent dans des gorges ou vallons très-courts, leur pente excessive vers leur origine est généralement supérieure à $\frac{6}{100}$ et n'est jamais

moindre que $\frac{2}{100}$; ces courants qui grossissent extraordinairement pendant les crues, sont sujets à tarir pendant une partie de l'année; ils affouillent à l'origine de leur cours, déposent à leur sortie des montagnes et divaguent par suite des dépôts qu'ils ont formés; leur vitesse est souvent supérieure à $14^m.00$ par seconde; tandis que celle des vents impétueux est seulement de $15^m.00$.

16. Nous avons vu les vallées se creuser et régulariser leur pente par l'action des courants immenses qui ont comblé d'anciens lacs en s'ouvrant un passage à travers les rochers; c'est une action semblable que les torrents récents exercent sous nos yeux. Cette action tend à donner au lit une courbe de pente régulière au milieu de terrains irréguliers, et elle y parvient par des érosions et des exhaussements : pour nous un torrent récent c'est une vallée qui se forme, ou si l'on aime mieux, le résultat de l'action d'un torrent est l'ouverture et la formation d'une vallée d'une étendue peu considérable.

Nous emprunterons à l'ouvrage que M. Surell a publié sur les torrents des Hautes-Alpes ce que nous allons ajouter sur ces courants impétueux.

17. Si l'on observe attentivement le cours des torrents depuis leur origine la plus élevée jusqu'à leur débouché dans les grandes vallées, on y distingue trois régions nettement caractérisées par leur forme, leur position, et les effets que les eaux produisent sur chacune d'elles.

La région dans laquelle les eaux s'amassent et affouillent le terrain, forme à la naissance du torrent un bassin en forme d'entonnoir caché dans la montagne. (Voyez les fig. 1 et 2.)

Dans la seconde région, que l'auteur appelle canal d'écoulement, les eaux s'écoulent sans affouiller leur lit et sans l'exhausser. Dans cette région qui est malheureusement la plus courte, l'action des torrents est ordinairement peu offensive. Les travaux d'encaissement que l'on entreprend quelquefois pour essayer d'arrêter les ravages des torrents, ont pour objet de prolonger ce canal d'écoulement.

Dans la dernière région, appelée *lit de déjection*, les eaux déposent les matières provenant de l'affouillement, elles recouvrent de blocs, de cailloux, de graviers et même de vase une grande étendue de terrain qui devient une plage aride privée de toute végétation. La forme générale que ces dépôts affectent est fort remarquable, c'est celle d'un monticule conique très-aplati, placé à la sortie de la gorge et accolé à la montagne; ce monticule a souvent plus de 3000$^{m}$.00 de large et sa hauteur au-dessus de la vallée dépasse quelquefois 70$^{m}$.00.

La pente des lits de déjection varie de $\frac{1}{12}$ à $\frac{1}{40}$, suivant la nature des dépôts; elle est à peu près constante pour les mêmes matières, lorsque le lit a pris de la stabilité. Les torrents qui ont un canal d'écoulement prolongé et dans lesquels la courbe du fond du lit est continue au passage de ce canal au lit de

moindre que $\frac{2}{100}$; ces courants qui grossissent extraordinairement pendant les crues, sont sujets à tarir pendant une partie de l'année; ils affouillent à l'origine de leur cours, déposent à leur sortie des montagnes et divaguent par suite des dépôts qu'ils ont formés; leur vitesse est souvent supérieure à $14^m.00$ par seconde; tandis que celle des vents impétueux est seulement de $15^m.00$.

16. Nous avons vu les vallées se creuser et régulariser leur pente par l'action des courants immenses qui ont comblé d'anciens lacs en s'ouvrant un passage à travers les rochers; c'est une action semblable que les torrents récents exercent sous nos yeux. Cette action tend à donner au lit une courbe de pente régulière au milieu de terrains irréguliers, et elle y parvient par des érosions et des exhaussements : pour nous un torrent récent c'est une vallée qui se forme, ou si l'on aime mieux, le résultat de l'action d'un torrent est l'ouverture et la formation d'une vallée d'une étendue peu considérable.

Nous emprunterons à l'ouvrage que M. Surell a publié sur les torrents des Hautes-Alpes ce que nous allons ajouter sur ces courants impétueux.

17. Si l'on observe attentivement le cours des torrents depuis leur origine la plus élevée jusqu'à leur débouché dans les grandes vallées, on y distingue trois régions nettement caractérisées par leur forme, leur position, et les effets que les eaux produisent sur chacune d'elles.

La région dans laquelle les eaux s'[illegible] fouillent le terrain, forme à la naissance [illegible] un bassin en forme d'entonnoir caché dans [illegible] tagne. (Voyez les fig. 1 et 2.)

Dans la seconde région, que l'auteur a [illegible] d'écoulement, les eaux s'écoulent sans aff[illegible] lit et sans l'exhausser. Dans cette région [illegible] heureusement la plus courte, l'action des [illegible] est ordinairement peu offensive. Les travaux [illegible] caissement que l'on entreprend quelquefois [illegible] sayer d'arrêter les ravages des torrents, [illegible] objet de prolonger ce canal d'écoulement.

Dans la dernière région, appelée lit de [illegible] les eaux déposent les matières provenant de l'af[illegible] lement, elles recouvrent de blocs, de [illegible] graviers et même de vase une grande [illegible] rain qui devient une plaine [illegible] gétation. La forme [illegible] est fort remarquable, [illegible] que très-aplati. [illegible] à la montagne: [illegible] 3000m.00 de large et [illegible] lée dépasse quelquefois [illegible]

La pente des lits de [illegible] vant la nature des dépôts [illegible] tante pour les mêmes raisons [illegible] de la stabilité. Les torrents [illegible] lement perdus [illegible] du lit est [illegible]

déjection, ont la pente *limite* et tendent peu à exhausser leur lit.

18. Deux causes provoquent annuellement les crues des torrents.

1° La fonte des neiges en juin;

2° Les orages vers la fin de l'été.

La fonte des neiges produit des crues qui peuvent être prévues, elles arrivent à des époques déterminées qui, à dix jours près, sont les mêmes pour tous les torrents qui dépendent d'un même groupe de montagnes. Les pluies d'orage donnent lieu à des crues plus terribles que les fontes de neige; ces pluies, toujours impossibles à prévoir, tombent par averses épaisses à la manière des trombes.

19. La crue s'annonce par un mugissement sourd dans la montagne, en même temps un vent furieux s'échappe de la gorge; peu après apparaît le torrent, sous la forme d'une avalanche d'eau roulant devant elle une masse de blocs entassés ayant l'apparence d'un barrage mobile; la violence de l'impulsion est telle que l'on voit bondir des blocs avant que les eaux deviennent visibles.

20. Les torrents qui causent tant de ravages dans les Alpes, sont peu redoutables dans le Jura, dans les Vosges, dans les Cévennes et même dans les Pyrénées. Dans ces montagnes dont le sol est très-résistant, on recontre des courants fort rapides, mais très-encaissés; leur lit est stable ou résiste à l'action des eaux. Ces courants ne recouvrent pas de monceaux

de débris les plaines qu'ils traversent, et ne les frappent pas de stérilité : ce sont encore des torrents, mais ils ont cessé d'être dévastateurs.

21. Les effets des torrents dans les Alpes doivent être attribués à la nature du sol de ces montagnes, car si le sol avait une résistance convenable, les eaux n'affouilleraient pas et ne transporteraient pas les blocs et les débris qu'ils versent dans la plaine.

Tout ce qui peut augmenter la résistance du sol doit diminuer les effets des torrents; la végétation et les bois qui consolident le sol, le mettent fréquemment à l'abri des affouillements. Aussi remarque-t-on que la présence d'une forêt empêche la formation des torrents, que le développement des forêts diminue la violence des torrents, et peut même l'affaiblir au point de la faire disparaître, que la destruction des forêts redouble la violence des torrents anciens.

Quand les bois et la végétation cessent de recouvrir une montagne dont le sol est peu résistant, ses flancs deviennent inévitablement la proie des torrents; partout où l'on a déboisé, des torrents récents se sont formés.

Les défrichements et les déboisements, sans être la cause des ravages des torrents, exercent donc une grande influence sur cette cause et en augmentent considérablement la puissance.

22. Il résulte évidemment de ce qui précède que la végétation est le meilleur moyen de défense à employer contre l'action dévastatrice des torrents, il en

résulte encore que les eaux qui aident si puissamment au développement de la végétation et qui sont l'agent le plus énergique de la destruction du sol, peuvent devenir l'agent le plus actif de sa conservation; plus elles ont de force pour détruire, plus, au moyen de la végétation, elles peuvent en développer pour le consolider et le préserver.

Les ouvrages défensifs, tels que barrages, digues, épis, etc., que l'on établit dans le lit même des torrents, tendent plutôt à s'opposer aux ravages de ces courants impétueux qu'à diminuer leur violence. Les effets souvent incertains qu'ils produisent ne sont jamais comparables à ceux que l'on peut obtenir de la végétation.

Ces ouvrages imposent seulement des limites à l'action destructive des eaux, mais ils ne diminuent pas cette action; ce sont des masses passives opposées à des forces actives, des obstacles inertes et d'une durée limitée opposés à des puissances qui attaquent sans cesse et ne se reposent jamais.

23. La végétation est donc le meilleur moyen à employer pour arrêter les ravages des torrents déjà formés, et pour prévenir la formation des torrents nouveaux.

L'opération consiste à semer, à planter et enfin à dériver l'eau des sources et même des torrents pour humecter le sol à des époques convenables, afin d'accroître sa fertilité et de faciliter le développement des plantes. Après avoir déterminé l'étendue du

terrain à défendre, on y attire la végétation par des moyens aussi actifs que prompts, on commence les travaux vers les parties hautes, et l'on s'avance successivement vers les parties basses en partageant les berges en zônes sensiblement horizontales par des petits canaux d'arrosage destinés à imprégner le sol d'une humidité fécondante. Pendant que les plantations consolident et préservent le sol au milieu duquel coule le torrent, des murs de chute établis dans le lit même du courant empêchent les affouillements.

24. Lorsque les affouillements diminuent dans la montagne, on peut s'occuper à neutraliser l'action du torrent dans la vallée; comme on n'a plus à redouter ni les crues formidables, ni l'exhaussement continuel du lit, on établit des digues dont le succès est alors assuré, souvent même un simple déblai suffit pour donner au courant un lit invariable; on parvient ainsi à amortir la violence du torrent, à lui enlever les vastes grèves au milieu desquelles il divague, et à lui donner sinon un régime, au moins de la stabilité.

### (2). Des torrents rivières et des rivières torrentielles.

25. Comme les torrents rivières et les rivières torrentielles participent de la nature des torrents et de celle des rivières, nous aurons peu de chose à dire sur ces courants; ce que nous pourrions ajouter se-

rait une répétition de ce qui a été dit sur les torrents, ou paraîtra mieux à sa place quand il sera question des rivières.

Les torrents rivières ont une pente qui excède rarement $\frac{6}{100}$; leur cours est plus étendu et mieux encaissé que celui des torrents, et leur volume d'eau est sujet à moins de variations.

Les rivières torrentielles ont un cours encore plus étendu que celui des torrents rivières, elles ont une pente régulière qui paraît constante sur de grandes longueurs, sans jamais excéder $\frac{15}{1000}$; leur volume d'eau est constamment assez fort, et leurs crues commencent à prendre de la durée.

Ces deux genres de courants divaguent souvent sur un fond plat et très-large; ils sortent fréquemment de leur lit, et même s'ouvrent brusquement un passage en abandonnant leur ancien lit; ils charrient beaucoup de gravier et le déposent sur le fond de leur vallée qui est ordinairement frappée de stérilité.

26. Ici, comme pour les torrents, comme pour les rivières, la végétation provoquée par des semis et des plantations près de l'origine des courants dans les montagnes, retient les eaux pluviales et les oblige à mettre plus de temps pour arriver dans le fond de la vallée; elle tend ainsi à diminuer les désastres causés par l'abondance des crues, leur arrivée subite et leur rapidité. On peut d'ailleurs augmenter ces bons effets en étendant dans les vallées les semis et les plantations, en limitant par des digues l'espace

dans lequel les courants peuvent divaguer, en défendant les rives attaquées par des enrochements.

C'est ici le lieu de faire observer que dans tous les travaux relatifs aux courants, il faut toujours procéder de l'amont vers l'aval, car ce que l'on fait vers l'amont peut rendre inutile et même nuisible ce qui d'abord aurait été fait vers l'aval, tandis que l'inverse ne peut jamais avoir lieu.

### *IV. Des courants à faible vitesse et de ceux à faible débit.*

27. Les courants à faible vitesse comprennent les ruisseaux, les rivières et les fleuves, qui ne diffèrent entre eux que par le volume de leurs eaux et l'étendue de leur cours; leur vitesse est ordinairement peu considérable et s'élève rarement au-dessus de $4^m.00$ par seconde.

Le ruisseau est un courant dont la pente et la vitesse sont assez fortes, mais dont le débit toujours faible s'élève rarement au-dessus de $10^m.00$; il coule dans un vallon ou une vallée de peu d'étendue.

Le courant dont le débit, dans l'état ordinaire, est rarement inférieur à $10^m.00$, est une rivière; pour qu'une rivière soit naturellement navigable, il est nécessaire que sa pente soit faible, et que son débit, dans l'état ordinaire, soit d'environ $40^m.00$ par seconde.

Les fleuves sont des rivières d'un parcours consi-

dérable qui versent directement leurs eaux dans la mer, et dont le débit, dans l'état ordinaire, est supérieur à 100$^{m}$.00.

Le ruisseau peut n'avoir pas de rameau, tandis qu'il est toujours un rameau nécessaire de l'*arbre* ou *système hydrographique* dont la rivière forme une des branches, et dont le fleuve est le tronc; le fleuve ou tronc principal se forme ainsi de plusieurs branches, et celles-ci d'un grand nombre de rameaux par degrés toujours plus petits.

28. Tous les terrains qui versent leurs eaux dans le même courant constituent son bassin; le bassin d'un ruisseau n'est souvent que le vallon dans lequel il coule; le bassin d'un fleuve a toujours une étendue considérable. En France, les quatre bassins de la Loire, du Rhône, de la Garonne et de la Seine ont ensemble une étendue de 3562 myriamètres carrés, qui comprend à peu près les $\frac{2}{3}$ de celle de la France.

| | | |
|---|---|---|
| L'étendue du bassin | de la Loire est de | 1200$^{m}$.64 |
| — | du Rhône | 796$^{m}$.24 |
| — | de la Garonne | 791$^{m}$.68 |
| — | de la Seine | 773$^{m}$.43 |

Le bassin d'un fleuve est limité par le faîte des chaînes de montagnes et de collines qui le sépare des bassins circonvoisins; les eaux qui tombent chaque année dans ce bassin se partagent en trois parties : la plus considérable est reçue dans le fleuve et se verse dans la mer par son embouchure; une autre est absorbée par les filtrations et la végétation; la der-

isée par les
la

é
st
ela
peu
ol de
même
rie avec
entre les
d et celles
ui tombent
bent sur les

ntité d'eau an-
ortionnelle à la
son bassin; mais
alement répartie,
lue du bassin; on
xiste une certaine
n et le volume d'eau
volume augmente ou
gne ou qu'on s'appro-

ont peu de profondeur
e leur cours, il en résulte
nsidéré dans son ensemble,
le au fond des vallées; il en

volume et en durée. Dans les parties supérieures du cours, la hauteur des eaux est plus considérable, le courant est rapide et la crue dure peu ; dans les parties inférieures, la crue s'élève moins haut, le courant a une vitesse moindre, et la crue dure plus longtemps ; ces variations dans la hauteur et la durée des crues, sur les différentes parties d'une même rivière, sont le résultat de la pente de la vallée, de l'étendue et de la pente de ses versants.

35. La hauteur des crues augmente incontestablement avec leur volume, et ce volume, dans le courant principal d'un bassin, est égal à la somme des volumes que ce courant principal reçoit en même temps de ses affluents. Lorsqu'un bassin a peu d'étendue, on conçoit que la même variation atmosphérique puisse exercer une influence égale sur ses différents points, en sorte que le fleuve ou courant principal reçoive au même moment le plus grand volume qu'il puisse avoir, et que la hauteur de la crue soit la plus grande possible et ne puisse pas être surpassée ; mais lorsque l'étendue d'un bassin est considérable, il faut un concours de circonstances tout à fait exceptionnel pour que les crues de tous les affluents correspondent au même instant et produisent dans le fleuve la plus grande crue possible. Les affluents d'un grand fleuve tirent leur origine de points opposés de l'horizon, toujours trop éloignés pour être soumis aux mêmes influences atmosphériques ; les uns viennent du nord ou de l'est, tandis

que d'autres viennent du sud ou de l'ouest ; les uns doivent leur crue à la fonte des neiges, les autres à des pluies continues. Les moments des crues des principaux affluents ne pouvant se confondre que dans des circonstances fort rares, on doit comprendre les grandes variations que peut présenter, dans la succession des temps, la hauteur des crues d'un fleuve dont le bassin a une étendue considérable.

Dans la partie supérieure d'un fleuve, lorsque les affluents sont peu nombreux, les crues sont plus fréquentes, et il est toujours facile d'assigner à leur hauteur une limite qu'elles ne dépasseront pas, limite qui diffère peu de la plus grande hauteur des crues qui arrivent chaque année ; mais, dans la partie inférieure du même fleuve, les grandes crues étant causées par le concours des crues d'affluents nombreux et considérables, venant de contrées fort éloignées et soumises à des influences atmosphériques différentes, ces crues seront beaucoup plus rares, et leur hauteur pourra atteindre et même surpasser celle des plus grandes crues dont les populations conservent le souvenir.

36. Nous savons que les défrichements et les déboisements des parties supérieures des versants, en facilitant la descente des eaux dans les vallées, tendent à rendre les crues plus subites et plus fortes, dans les parties des fleuves et des rivières les plus rapprochées des montagnes; sur les parties inférieures des mêmes courants, les bois, haies, arbres

isolés, digues et autres obstacles qui recouvrent le sol des vallées, en accroissant la résistance à l'écoulement pendant les crues, prolongent leur durée et augmentent aussi leur hauteur, en sorte que deux causes qui paraissent opposées, telles que le déboisement et les plantations, tendent à produire une augmentation dans la hauteur des crues; mais l'effet du déboisement se fait principalement sentir dans les parties supérieures du courant, tandis que les plantations ne sont contraires que dans les parties inférieures, lorsqu'elles sont établies arbitrairement et sans aucune direction fixée à priori pour régulariser le cours de la rivière ou du fleuve de manière à assurer son régime. Il est d'ailleurs à désirer que la législation sur les cours d'eau éprouve des modifications importantes et impose certaines servitudes aux terrains que recouvrent les grandes crues des fleuves et rivières, sur lesquels ces moteurs peuvent exercer leurs ravages.

37. Le débit d'un courant est le volume d'eau auquel il livre passage pendant un temps déterminé tel que la durée d'une seconde. Le volume d'eau que débitent les rivières et les fleuves éprouve donc de très-grandes variations dans le cours d'une année; cependant il existe différents états de ces courants pendant chacun desquels leur niveau et par conséquent leur débit restent sensiblement constants; on dit alors que le courant est dans un état permanent.

Parmi les différents états de permanence que présente un courant on en distingue trois principaux dont la durée est plus on moins longue, qui sont :

L'état des grandes crues qui a le moins de durée ;

L'état des eaux moyennes dont la durée est de plusieurs mois ;

L'état des basses eaux que l'on appelle l'étiage du courant.

38. Le lit des courants présente souvent une section déterminée pour le temps des basses eaux, une autre pour les eaux moyennes, enfin une dernière pour les crues et les débordements. Le lit qui correspond à la première section s'appelle *lit d'étiage*, celui qui correspond à la seconde est le *lit mineur*, et celui qui correspond à la troisième est le *lit majeur*. Il existe cependant certaines parties de rivière qui ne présentent qu'une section, et d'autres qui n'en présentent que deux à peine distinctes ; telles sont les parties de rivière où le courant est totalement encaissé dans un lit profond d'où les eaux ne peuvent sortir, telles sont encore les parties où le lit a une largeur excessive relativement à la profondeur ; dans les premières, les trois lits se confondent ; dans les dernières, le lit mineur se confond avec le lit d'étiage, mais, pendant les débordements, la vallée sert de lit majeur.

39. Lorsque la résistance du sol, dans lequel le lit d'un courant est creusé, n'est pas supérieure à l'action des eaux, cette action attaque les rives et

quelquefois le fond, alors le lit s'élargit et s'approfondit, ou sa section se modifie. Si la section est très-large, c'est que la résistance du fond est supérieure à celle des rives; si la section est profonde, c'est que les rives sont plus résistantes que le fond, circonstance qui se présente rarement; si le sol est d'égale résistance, comme la plus grande vitesse est à la surface et que les rives, à cause de leur inclinaison, sont plus faciles à attaquer que le fond, la section sera plus large que profonde; si la section n'est pas symétrique, c'est que les vitesses sont inégalement réparties des deux côtés du plan vertical passant par l'axe. (Voir la fig. 6.)

La profondeur des rivières est toujours peu considérable, car l'action de leurs eaux ne peut attaquer que les couches superficielles du fond des vallées; pour se rendre compte de ce fait, il suffit de se rappeler que tout semble indiquer que la pente des vallées a été régularisée par des courants immenses qui ont formé les grands dépôts qui en constituent le fond.

Les matières de ces dépôts sont disposées par couches légèrement inclinées, et, lorsqu'elles sont en cailloux roulés et graviers, ces éléments augmentent de grosseur à mesure que l'on s'enfonce davantage. La couche supérieure est formée d'éléments d'une grosseur presque égale, partout en rapport avec la pente des vallées.

Les rivières ou courants actuels ayant moins de pente que leur vallée, il en résulte que les eaux ne

peuvent exercer une action assez énergique pour pénétrer profondément dans le sol ; le lit des rivières a donc, en général, peu de profondeur, et l'action de ces courants se borne à attaquer la couche superficielle du sol, à transporter des vases, des sables et de menus graviers; et à déplacer quelques graviers plus gros.

40. Les variations du débit des rivières sont la principale cause des changemens qui s'opèrent dans leur lit; en effet, si le débit était constant, il s'établirait, pour chaque nature de terrain, un état d'équilibre entre l'action des eaux et la résistance du sol, et, dès ce moment, on n'apercevrait plus de changement notable dans le lit du courant; mais, comme le lit des rivières est destiné à recevoir et à livrer passage à des volumes d'eau très-différents, il en résulte que l'équilibre dont nous venons de parler ne peut s'établir d'une manière permanente; les rivières tendent donc, plus ou moins, à modifier leur lit, et ce lit ne peut présenter une complète stabilité que quand l'art, la végétation ou quelques circonstances locales, sont venues accroître la résistance des berges au point de la rendre supérieure à la plus forte action des eaux. Quand on est parvenu à établir un rapport convenable entre l'action des eaux et la résistance des berges, ou quand ce rapport s'est établi naturellement, que le lit du courant peut recevoir et livrer passage aux plus grandes eaux sans en être attaqué, on dit que ce lit

a de la stabilité et que le régime de la rivière est établi.

Comme l'action des eaux dépend de leur volume, de la section et de la pente du courant, cela explique pourquoi quelques hydrauliciens disent que l'on entend par régime d'une rivière, certaines relations entre la nature du terrain, la pente, la section et le volume des eaux, qui sont telles, que l'état de la rivière est fixé et ne varie pas sensiblement avec le temps.

41. Nous venons de voir que le défaut d'équilibre entre l'action des eaux et la résistance du lit était la principale cause des grands changements qu'éprouve le cours des rivières.

Dans l'état ordinaire des choses, la résistance du lit est rarement supérieure à l'action des eaux, et si, dans certaines rivières, cette supériorité existe lorsque le débit est le plus faible, elle cesse d'exister pour le débit moyen et pour celui des crues; aussi la variation du débit est-elle la circonstance qui nuit le plus au régime des rivières, et qui prive le lit de toute stabilité.

Après la variation du débit, la circonstance qui contribue le plus aux changements du lit des rivières, est le défaut de concordance entre les axes des différents lits d'un même courant; la variation du débit augmente ou diminue l'intensité de l'action, le défaut de concordance dont il s'agit fait varier sa direction; en effet, pendant les basses eaux, la direction

du filet de plus grande vitesse est, à très-peu près, celle du lit d'étiage qui est le plus sinueux; pendant les moyennes eaux, la direction du filet de plus grande vitesse est celle du lit mineur, qui est quelquefois fort différent du lit d'étiage; il en résulte que l'axe du lit mineur croise fréquemment l'axe du lit d'étiage. Enfin, pendant les crues, la direction du filet de plus grande vitesse est celle du lit majeur, qui, pour certaines rivières, diffère peu de la direction même de la vallée; cette direction est alors la plus courte et croise, en un grand nombre de points, l'axe du lit mineur et celui d'étiage : il résulte donc de là, qu'à mesure que l'action des eaux prend plus d'intensité par l'augmentation du débit, cette action agit plus directement sur certaines parties des berges et tend ainsi à changer la forme des lits dont elle croise les axes. Si les axes des trois lits pouvaient se confondre en projection horizontale, alors l'action des eaux agissant constamment dans la même direction, tendrait à conserver au lit sa forme et sa profondeur; s'il ne pouvait pas encore avoir une stabilité parfaite, il cesserait au moins d'éprouver de grands changements.

Les circonstances qui, après la variation du débit et le défaut de concordance entre les axes des différents lits, contribuent le plus à modifier le cours d'une rivière, sont le peu de grosseur et la mobilité des matières qui composent le sol.

42. La résistance du lit et des matières qui le

composent est le moyen dont la nature se sert pour modérer la vitesse. Considérée dans toute l'étendue du cours d'une rivière, la vitesse comme la pente va sans cesse en diminuant depuis la source jusqu'à l'embouchure, tandis que la section et le débit croissent au contraire entre les mêmes limites.

Dans les rivières comme dans les vallées, la grosseur des matières qui recouvrent le fond est partout en rapport avec la vitesse de leurs eaux et la pente de leur surface; il existe une telle relation entre la pente d'une rivière et la grosseur des sables et graviers qu'elle charrie, que la vue seule d'un des sédiments moyens qui se trouvent sur le fond, suffit pour donner une idée de la pente.

43. Il résulte de ce que nous venons de dire, que la pente ou la vitesse des eaux d'une partie quelconque d'une rivière détermine la grosseur des matières qui se trouvent sur son fond; aussi, lorsqu'on s'occupe de la pente des rivières, de la vitesse de leurs eaux, on est naturellement conduit à distinguer les parties de rivière à fond de gravier de celles à fond de sable, et encore de celles à fond de vase.

Les rivières à fond de sable ont moins de pente que celles à fond de gravier, cette pente s'élève rarement à $\frac{1}{2000}$; la pente des rivières à fond de vase est à son tour plus faible que celle des rivières à fond de sable.

Les rivières à fond de gravier et celles à fond de sable, pendant les crues, apportent quelquefois à

lit des changements considérables; des bancs se forment rapidement; des îles divisent leurs cours en plusieurs bras, et plusieurs bras se réunissent en un seul. Lorsque ces rivières débordent et que leurs eaux se répandent sur les terres en culture, elles y forment des courants qui enlèvent la terre végétale et la remplacent par des couches de graviers et de sable.

Les rivières à fond de vase ont un cours en général très-sinueux, on en voit cependant quelques-unes dont le cours est assez direct; leur fond est beaucoup plus régulier que celui des rivières à fond de gravier. Lorsque les eaux de ces rivières peuvent se répandre sur de vastes prairies, elles y causent peu de changements et y déposent un limon qui contribue à leur fertilité. Quelles que soient la pente d'une rivière et la nature du sol dans lequel le lit est creusé, ou des matières qui recouvrent son fond, pendant les basses eaux, son cours éprouve des changements à peine sensibles; ces changements ne s'opèrent sur une grande échelle que pendant les crues. Lorsque les eaux sont rentrées dans leur lit mineur, il arrive un instant où la résistance du sol commence à devenir supérieure à l'action du courant; les berges cessent d'être attaquées; les matières que charriaient les eaux s'arrêtent; et la rivière prend un régime qui reste à peu près stable jusqu'à l'arrivée d'une nouvelle crue.

44. Lorsque les eaux deviennent basses, la super-

ficie du courant qui, jusque-là, avait paru avoir une pente régulière et même constante, commence à présenter des inégalités plus ou moins sensibles, qui sont des conséquences des irrégularités du fond. Pendant la durée de l'étiage, la plupart des rivières à fond de gravier présentent une suite de bassins séparés par des seuils au-dessus desquels la hauteur de l'eau est souvent très-petite; dans l'étendue de chaque bassin, la pente et la vitesse sont très-faibles; mais après chaque seuil et dans l'intervalle qui sépare deux bassins, la pente est plus ou moins forte et la vitesse est quelquefois considérable. Le profil longitudinal de la superficie d'un courant présente donc, à l'époque de l'étiage, une suite de lignes sensiblement horizontales, liées entre elles par d'autres lignes d'une inclinaison plus ou moins forte. Aux lignes horizontales correspondent des profondeurs qui sont souvent considérables; tandis que, dans les parties inclinées, la profondeur est en général assez faible. (Voir la fig. 7.)

Le seuil qui termine un bassin prend fréquemment le nom de *haut fond*, à cause de la faible profondeur de la section; la partie du courant comprise entre deux bassins prend le nom de *rapide*, pour rappeler la grande vitesse que les eaux y ont ordinairement; lorsque la hauteur de l'eau est constamment faible, cette partie prend le nom de *maigre*.

C'est d'après la profondeur des *rapides* qu'il faut apprécier la hauteur moyenne de l'eau d'une rivière,

puisque dans les bassins l'eau est retenue, et que son niveau peut baisser avec celui du seuil qui la retient.

45. Le fond du lit des rivières éprouvant certaines variations dans diverses parties de leur cours, on se demande souvent si ce fond s'élève ou s'abaisse avec le temps? Pour répondre à cette question, nous pouvons dire qu'il résulte d'observations faites sur la Seine, sur la Loire, sur le Rhin, et même sur le Pô, que le fond des rivières, considéré dans son ensemble, ne change pas sensiblement; si dans certaines parties le fond s'élève ou s'abaisse, cela tient à des circonstances variables ou momentanées. M. Lombardini, ingénieur italien, a reconnu que le fond du Pô n'a pas éprouvé d'exhaussement sensible depuis son endiguement, qui remonte au temps de la domination des Étrusques, et que c'était à tort que l'on croyait généralement en France, d'après l'assertion de quelques savants, que le fond du fleuve était plus élevé que les plaines voisines.

Nous ajouterons à ce qui précède quelques réflexions et observations que nous puiserons dans l'excellent mémoire sur le Rhin, de MM. Legrom et Chaperon, inséré, en 1838, dans les *Annales des Ponts-et-Chaussées* :

« On croit généralement que les graviers qui em-
» barrassent le cours des rivières sont amenés des
» régions supérieures qu'elles traversent, et déposés
» successivement à mesure que l'équilibre s'établit

» entre l'action des eaux et la résistance des matières
» charriées. Le phénomène d'un grand transport de
» matières s'est effectivement produit depuis l'ori-
» gine des vallées jusqu'à la mer, à l'époque de leur
» formation; ce transport se produit même encore
» sous nos yeux, en proportion appréciable, dans les
» courants à grande vitesse, tels que les rivières tor-
» rentielles; mais, dans les courants à faible vitesse
» ou dont la vitesse n'est pas excessive, les effets de
» ce genre n'ont pas d'influence sensible sur les mo-
» difications qu'éprouve leur régime. Si les graviers
» provenaient des parties supérieures, ils devraient
» se déposer de préférence dans les bassins où la
» profondeur d'eau est considérable et la vitesse fai-
» ble, et par suite les dépôts successifs auraient dû
» régulariser la pente et faire disparaître les seuils
» et les rapides; or ces effets ne se produisent pas,
» car on trouve des bassins creusés dans le rocher
» sur le fond desquels il ne s'arrête pas un caillou,
» tandis qu'en amont, sur des points où la vitesse
» est plus forte, on aperçoit une multitude de
» bancs de gravier.

» Si les courants charriaient des graviers depuis
» leur source et les abandonnaient quand leur vitesse
» n'est plus capable de les entraîner, le fond du
» courant devrait naturellement s'exhausser; cepen-
» dant, comme on rencontre sur la plupart des cou-
» rants des bassins creusés dans le rocher, le tuf,
» l'argile compacte, dont le fond n'est recouvert

» d'aucune couche de gravier, on peut affirmer que
» ce fond ne s'exhausse pas.

» Les bancs de gravier doivent leur origine à la
» seule corrosion des berges; à l'apparition d'une
» grève correspond toujours la destruction d'une
» berge supérieure et voisine. La corrosion marche
» toujours de l'amont vers l'aval, il en est de même
» du banc de gravier qui en est le résultat. »

Dans la plupart des rivières, une partie des graviers que les eaux déplacent se résout en sable et en terre qui restent en suspension et qui sont réellement transportés par les eaux des crues. Lors des débordements, les parties les plus ténues se déposent sur le fond des vallées; pendant les eaux moyennes, les sables se déposent sur les îles et dans les faux bras, et le reste est porté jusqu'à la mer; mais, à la fin de la période annuelle, le fond n'a éprouvé ni exhaussement, ni variation sensible, et l'on retrouve encore, dans certaines rivières, les gués dont César a profité pour faire passer ses armées.

46. Le cours d'une rivière est toujours plus ou moins sinueux, et présente ordinairement deux ordres de sinuosités : celles du premier ordre sont indépendantes de l'action des eaux du courant, et résultent des contours mêmes de la vallée que suit la rivière. Ces premières sinuosités peuvent être régularisées ou légèrement modifiées, mais ne peuvent être effacées ou détruites puisqu'elles tiennent à la nature même des choses. La Seine est une des ri-

vières qui présentent d'une manière très-prononcée des sinuosités de cet ordre.

Quant aux sinuosités du second ordre, elles se forment chaque jour sous nos yeux, et sont le résultat de la supériorité de l'action des eaux sur la résistance du sol. Lorsqu'une rivière affecte une direction rectiligne sur une certaine étendue, et que cet effet n'est pas dû à des rives dont la résistance est suffisamment fortifiée par l'art ou par des circonstances locales ; dans cette partie, le lit ne peut avoir de stabilité; car, pendant les crues, l'action des eaux étant généralement supérieure à la résistance du sol, la moindre circonstance qui peut déterminer la corrosion de l'une des rives, tend à changer la direction du cours, et la formation d'une première anse suffit pour modifier la forme et la direction du lit sur une grande longueur.

47. Lorsque l'action des eaux commence à creuser un coude ou une anse, la corrosion marche d'abord très-lentement, son intensité augmente ensuite avec le degré de courbure, puis elle décroît et s'arrête lorsque l'anse a acquis un développement tel que la diminution de pente ou de vitesse qui en résulte affaiblisse l'action des eaux et la rende moindre que la résistance du sol.

Lorsqu'une anse est formée, la plus grande profondeur correspond à peu près au milieu de sa longueur, et la moindre profondeur à l'inflexion de l'axe du courant; ainsi, dans un courant, les plus

grandes hauteurs d'eau se trouvent au droit des courbes, et les moindres hauteurs correspondent aux parties rectilignes; c'est ordinairement dans ces parties que se trouvent les passages à gué.

Le moment d'équilibre entre l'action des eaux et la résistance des berges, variant dans un même courant avec la pente et la nature du sol, il en résulte que ce courant peut présenter de grandes différences d'aspect sur diverses parties de son cours. Tantôt il est encaissé et presque rectiligne, ailleurs il devient très-sinueux, puis il est parsemé d'îles et divisé en plusieurs bras.

Lorsque la vallée d'un courant est trop étroite pour que les anses, coudes ou contours puissent prendre le développement nécessaire pour réduire la pente et la vitesse afin d'affaiblir l'action des eaux, le lit est continuellement modifié, et les contours transportés en avant de manière à occuper successivement les diverses parties du fond de la vallée.

48. Les sables et le limon que les rivières charrient arrivent jusqu'à la mer, où les matières se déposent et forment, à l'embouchure des fleuves, des barres dans l'Océan, des îles dans la Méditerranée. On se rend facilement compte de la cause qui détermine ces dépôts, car il est naturel que les matières que les eaux tiennent en suspension lorsqu'elles sont en mouvement, se déposent quand ces eaux deviennent presque stagnantes à leur arrivée dans la mer. (Voir la fig. 8.)

Dans l'Océan, la haute marée arrête les eaux et les oblige à s'élever jusqu'à ce qu'elle commence à descendre; alors le volume d'eau considérable amoncelé dans le lit du fleuve, en s'écoulant brusquement, entraîne au loin dans la mer les matières qu'il tient en suspension. Une partie de ces matières forme des barres toujours sujettes à la variation du flux et du reflux, et qui ne s'élèvent pas jusqu'à la superficie des eaux. Aussi remarque-t-on que les fleuves qui versent leurs eaux dans l'Océan, ont, à une distance notable de leur embouchure, le fond de leur lit légèrement incliné; mais, près de cette embouchure, le fond, qui allait en descendant, se relève et donne lieu à un bassin plus ou moins profond.

Dans la Méditerranée, comme la marée est peu sensible, les eaux du fleuve abandonnent les matières qu'elles tiennent en suspension à leur entrée dans la mer, où elles s'amoncèlent jusqu'à ce qu'elles paraissent à la surface des eaux; elles forment ainsi des îles et ce que l'on appelle un *delta*, qui s'avancent dans la mer d'une manière lente, que le temps rend sensible. La ville d'Arles fut bâtie sur un rocher à l'embouchure du Rhône, l'embouchure actuelle est à quarante-huit kilomètres (12 lieues) de la ville.

### *V. Des ouvrages et travaux dont l'objet est de donner un régime aux rivières ou d'améliorer celui qu'elles ont.*

49. Les ouvrages que l'on établit sur le fond des vallées, les travaux que l'on exécute dans le lit des

rivières peuvent avoir pour objet de défendre les propriétés riveraines, de contribuer à l'augmentation des produits agricoles en facilitant les irrigations, de favoriser l'industrie en mettant à sa disposition la force motrice nécessaire aux différents genres de fabrication dont elle s'occupe, de perfectionner la navigation en maintenant dans les rivières fréquentées par les bateaux une hauteur d'eau suffisante, enfin de compléter les routes et chemins par la suppression des gués ou par la construction de ponts ; ces travaux doivent donc remédier :

1° Aux inondations nuisibles à l'agriculture ;

2° Aux corrosions des berges ;

3° Aux dépôts dans le lit qui tendent à faire ouvrir de nouveaux bras ;

4° Aux inconvénients que présentent souvent les retenues faites dans l'intérêt de l'industrie ;

5° A la la faible hauteur des eaux dans les rivières que fréquentent les bateaux ;

6° Aux inconvénients que présentent les passages à gué qui se trouvent encore sur certains chemins.

Mais les ouvrages à établir, les travaux à exécuter pour obtenir ces résultats importants, devant toujours contribuer à fixer le régime des rivières ; avant de les entreprendre, il est de toute nécessité d'apprécier les conséquences qu'ils doivent avoir sur le régime des grandes eaux, car cette appréciation peut

exercer une grande influence sur les dispositions qu'il convient de préférer.

50. Les inondations, lorsqu'elles arrivent dans une saison convenable, peuvent être favorables à l'agriculture; mais elles deviennent nuisibles lorsque, dans une saison inopportune, elles recouvrent des terres en culture dont elles endommagent et même détruisent les produits; souvent même elles frappent ces terres de stérilité en déterminant des courants qui enlèvent, sur certains points, la terre divisée par la culture et la remplacent par des sables et des graviers.

Lorsqu'une rivière est libre, une inondation est le résultat d'une grande crue, qui ordinairement n'arrive que dans une saison convenable; quand au contraire l'eau de la rivière est soutenue par des barrages établis dans l'intérêt de l'industrie ou dans celui de la navigation, la moindre crue détermine souvent un débordement; dans cette circonstance, les inondations arrivent en toute saison, deviennent plus fréquentes et durent plus longtemps.

51. Dans une vallée large et à fond plat où coule une grande rivière qui, pendant les crues, débite un volume d'eau considérable, on limite, par des digues insubmersibles, l'espace sur lequel les eaux d'inondation peuvent se répandre, de manière cependant à laisser au lit majeur que l'on crée ainsi, une largeur suffisante pour la prompte évacuation des eaux des plus grandes crues, et à rendre à l'agriculture le surplus du fond de la vallée.

La vallée de la Loire a huit ou dix kilomètres de large entre les coteaux qui la bordent; dans cette vallée, on a fait la part des eaux en réduisant sa grande largeur et en contenant les eaux d'inondation par des digues que l'on appelle *turcies* ou *levées*. Ces digues, qui règnent sur une étendue d'environ 350 kilomètres, constituent un grand travail dont l'origine est fort ancienne. La hauteur des levées au-dessus de l'étiage varie de $6^m.70$ à $7^m.30$, suivant la hauteur des crues dans les parties où ces ouvrages sont établis. Il existe encore en France plusieurs grandes rivières dont les inondations s'étendent sur $1200^m$ à $1500^m$ qui pourraient être maintenues par des digues dans une largeur de 150 à $200^m$.

Les digues insubmersibles doivent, autant que possible, être établies parallèlement au cours de la rivière convenablement régularisé, afin que l'axe du courant ou le filet de plus grande vitesse suive à peu près la même direction pendant les hautes et pendant les basses eaux; car nous savons que le défaut de concordance des axes contribue pour beaucoup au désordre que les crues apportent dans le lit des rivières.

52. Quand un barrage, établi dans une rivière, rend les inondations, sur les terres en culture, plus fréquentes et plus longues, il faut reconnaître si ce barrage est d'une nécessité absolue, ou si sa suppression doit entraîner peu d'inconvénients.

Examinons d'abord le premier cas, admettons qu'un barrage établi dans l'intérêt de la navigation, cause des dommages aux propriétés riveraines; comme dans cette circonstance le barrage est indispensable, il faut faire quelques sacrifices pour le conserver; si la rivière a peu d'importance, il suffira souvent d'augmenter la largeur du pertuis attenant au barrage, ou le nombre des vannes qui y sont fréquemment accolées; mais si la rivière est importante et que le barrage soit fixe, il faut le rendre mobile en adoptant le système imaginé par M. Poirée, aujourd'hui inspecteur divisionnaire des ponts et chaussées; cependant, sur des rivières de moyenne grandeur, qui sont les plus nombreuses, nous pensons qu'il serait avantageux de faire usage du barrage dont nous allons donner une idée. Ce barrage a plusieurs objets à remplir; il doit soutenir les eaux pour le service de la navigation et des usines, offrir un passage facile pour les bateaux, enfin prévenir les débordements à des époques où ils seraient nuisibles aux récoltes; sa longueur doit être égale ou un peu plus grande que la largeur de la rivière, afin qu'étant ouvert, l'eau puisse s'écouler avec la même facilité que s'il n'existait pas. Il est divisé en un nombre impair de parties dont celle du milieu a nécessairement $13^m.00$ de longueur, et les autres une longueur aussi égale à $13^m.00$ ou un peu plus faible que ce nombre. Chacune de ces parties est divisée en trois passages, celui du milieu étant un peu plus grand

que la somme des deux autres qui sont égaux entre eux, ainsi pour la partie du centre ou qui correspond à l'axe du courant, le passage du milieu a $7^m.00$, et chacun des deux autres $3^m.00$. Chacune des parties est fermée par deux ventaux busqués tournant sur un axe vertical et s'arc-boutant l'un contre l'autre en s'appuyant contre un *seuil* ou un *busc*. Chacun des ventaux est divisé en deux parties inégales par l'axe vertical sur lequel il doit tourner; la partie busquée vers l'amont est la plus grande, de sorte que la porte étant fermée, la pression de l'eau suffit pour appuyer les deux ventaux l'un contre l'autre. Pour déterminer l'ouverture de ces ventaux, on a placé dans l'intérieur de la partie busquée une petite porte tournant sur un axe vertical qui la divise en deux parties inégales. Le tout étant fermé, par une manœuvre aussi facile que simple on détermine l'ouverture de la petite porte de deux des ventaux, alors les parties busquées étant moins pressées, la différence des pressions suffit pour ouvrir chaque ventail. Afin de faciliter la manœuvre, une passerelle est établie au-dessus des portes; les deux parties de cette passerelle qui correspondent au passage du milieu sont mobiles, elles tournent sur un axe fixé au système de charpente qui doit maintenir vertical l'axe des ventaux. (Voir la fig. 9.)

Le barrage que nous venons de décrire n'a jamais été exécuté; nous l'avions proposé en 1818, pour être construit sur la rivière de Marne près de Vitry-

le-Français, afin de remédier aux dommages causés par un barrage fixe qui existait près de cette ville : la pénurie des finances fit d'abord ajourner l'exécution de ce projet, que des ouvrages dépendant des fortifications ont rendu depuis lors inutile.

Sur les rivières de peu d'importance, on pourrait encore former un barrage mobile d'une suite de poutrelles s'appuyant par leur pied contre un seuil auquel elles seraient fixées par une charnière. Lorsque le barrage devrait être fermé, les poutrelles seraient maintenues dans une direction à peu près verticale, par une chaîne tendue horizontalement, et dont les extrémités seraient chacune enroulée sur un treuil ; lorsque l'on voudrait ouvrir le barrage en totalité ou en partie, il suffirait de dérouler la chaîne plus ou moins de manière à incliner les poutrelles et même à les coucher horizontalement. Mais c'est assez s'arrêter sur des détails qui n'ont qu'un rapport indirect avec l'objet qui nous occupe. (Voir la fig. 10.)

Si le barrage n'est pas indispensable, comme cela a lieu lorsqu'il a seulement pour objet de créer une force motrice pour le service d'un moulin ou d'une autre usine de peu d'importance; dans ce cas, il faut le supprimer, soit en indemnisant le propriétaire de l'usine, soit en lui donnant, au moyen d'une dérivation, la force motrice à laquelle il a droit.

53. La plupart des ruisseaux et des petites rivières fournissent la force motrice des moulins et usines;

pour utiliser cette force on dérive les eaux au moyen de canaux à pente faible, ou bien encore on établit des barrages dans le lit même des ruisseaux, afin d'obtenir des chutes d'une hauteur convenable.

Le canal de dérivation est préférable au barrage, car, pour l'établir, il n'est pas nécessaire de faire obstacle au libre cours des eaux; il suffit de poser au fond du lit un seuil de peu de hauteur, qui sert à régler le partage du débit entre le lit primitif et le canal de dérivation; lorsque le ruisseau a peu de pente, la dérivation a quelquefois beaucoup de longueur, mais cela lui donne un nouveau genre d'utilité, car alors elle peut servir de canal d'arrosage pour tous les terrains compris entre l'un de ses bords et le lit de la rivière.

54. Les barrages établis dans le lit même d'un ruisseau à forte pente et bien encaissé sont moins avantageux que les dérivations; mais dans ces circonstances, ils ont peu d'inconvénients; il en est tout autrement de ceux que l'on établit dans le lit des ruisseaux mal encaissés, qui coulent dans des vallons à faible pente, à fond large et sensiblement horizontal. Dans ces circonstances, les eaux qui déposent en amont du barrage relèvent le fond du lit, et la moindre crue finit par déterminer un débordement qui cause de grands dommages aux propriétés riveraines, lorsque ce débordement arrive dans une saison inopportune. Les dommages peuvent même devenir permanents, si les bords du ruisseau sont

plus élevés que les propriétés situées sur le fond du vallon, car les eaux débordées n'ayant plus d'écoulement, séjournent sur le sol, et ne tardent pas à le convertir en marécages.

Les réglements administratifs pour la fixation du point d'eau, pour la levée des vannes, pour le curage du lit, ne remédient que bien imparfaitement aux conséquences des concessions d'eau accordées trop facilement, et quelquefois malgré les oppositions produites pendant les enquêtes dont elles sont précédées; il n'est pas rare de rencontrer des vallées dont le fond primitivement couvert de riches prairies, est devenu en un certain nombre d'années, et par le fait des barrages, un véritable marécage aussi contraire à la santé qu'au bien-être des habitants. Nous avons eu l'occasion de visiter une de ces vallées, dans laquelle on trouvait sur la rivière des barrages tellement rapprochés que, sur presque tous les points, le niveau de l'eau était supérieur à celui des prairies; les eaux pluviales et une partie de celles des débordements, ne pouvant entrer dans le lit de la rivière dont les bords étaient relevés, séjournaient sur le sol qui était devenu marécageux sur une étendue de 35 kilomètres. Pour remédier à ce triste état de choses, il fallait ou détruire des usines auxquelles le temps avait donné une grande valeur, ou se déterminer à ouvrir un nouveau lit à la rivière, en laissant l'ancien pour le service des usines; c'est ce dernier parti qui nous a paru préférable et que

nous avons proposé dans le rapport que nous avons dû produire sur cette affaire. C'est assez nous arrêter sur des dommages qui ne sont pas inhérents à la nature des choses, et qui tiennent à la faiblesse de notre système administratif.

55. Nous savons qu'une rivière attaque ses rives chaque fois que l'action des eaux devient supérieure à la résistance du sol. Pour défendre les berges d'un courant et les préserver de toute corrosion, il doit donc suffire d'augmenter leur résistance, et, à cet effet, de recourir à l'emploi d'un revêtement continu approprié à la nature du sol, et capable de résister à l'action des eaux. Il est reconnu maintenant que les épis et autres ouvrages dont on faisait usage autrefois, au lieu d'éloigner l'action des eaux de la rive où ils sont placés, semblent, au contraire, la maintenir sur cette rive.

Lors donc qu'une berge est attaquée par le courant, il suffit, pour arrêter les progrès de la corrosion, de soustraire à l'action des eaux la partie de la berge formée de terre, de sable ou de graviers mal agglutinés. On atteint ce but en faisant usage, suivant les circonstances, et surtout suivant la nature du sol et la vitesse des eaux, de gazons, de plantations de roseaux et d'oseraies, de clayonnages et d'enrochement, enfin de perrés. Lorsqu'il faut défendre immédiatement le pied d'une digue attaqué par l'action d'un courant très-rapide, on emploie avec avantage des saucissons en branches de saule remplis de

moellons ou simplement de graviers ; lorsque le danger est moins imminent on peut faire usage d'un matelas de fascinage que l'on échoue en le recouvrant de moellons.

La principale condition à remplir quand on défend une rive, c'est de maintenir sa courbure parfaitement continue, et, à cet effet, de régulariser et de défendre cette rive sur toute la partie menacée quelle que soit sa longueur. Lorsque l'eau suit une anse continue qui ne présente aucun point saillant, et qui est défendue par l'un des procédés que nous venons d'indiquer, l'action du courant ne produit aucune corrosion sensible, et cela doit être, puisque sur tous les points la résistance de la rive est rendue supérieure à l'action des eaux.

56. Un dépôt qui se forme dans le lit d'une rivière, indique généralement que la section est trop large ; on le fait disparaître en réduisant la largeur du lit d'étiage au moyen de digues submersibles un peu plus élevées que le sommet du dépôt ; si l'on n'employait pas ce moyen, on enleverait inutilement les matières du dépôt, elles seraient, en peu de temps, remplacées par de nouveaux graviers apportés par les crues.

57. Lorsqu'un courant est peu considérable, et que son cours est très-sinueux, on peut, sans qu'il en résulte de graves inconvénients, entreprendre de le redresser ; mais quand on veut faire un travail de ce genre sur des rivières de quelque importance, il

faut prendre garde de produire un mal plus grand que celui auquel on veut remédier.

A la fin du siècle dernier, on crut pouvoir redresser la Robine de Narbonne, afin d'abréger le trajet de la navigation; lorsque le redressement fut ouvert, on n'a plus eu une hauteur d'eau suffisante, et l'on fut obligé d'établir des écluses pour soutenir les eaux dans un canal où, avant l'ouverture du redressement, la navigation se faisait facilement. Dans une partie du cours de l'Oise, où la rivière faisait plusieurs contours, on crut avantageux de la redresser; mais, en peu de temps, la rivière a formé de nouvelles sinuosités dont le développement ayant été mesuré, s'est trouvé égal en longueur à celui des contours qu'on avait supprimés.

Avant d'ouvrir un redressement, il faut reconnaître la pente qu'il prendra, et déterminer la section qu'il doit avoir pour conserver aux eaux d'amont une hauteur convenable pendant l'étiage; il faut ensuite fortifier les rives de la partie située à l'aval, pour qu'elles ne soient pas attaquées par l'action des eaux, des crues, à leur sortie du nouveau lit; enfin, il est encore nécessaire de connaître si l'action des mêmes eaux n'attaquera pas les nouvelles rives, et, dans le cas où le sol ne pourrait résister à cette action, de fortifier les rives du redressement pour les préserver de toute corrosion.

58. Parmi toutes les rivières dont le cours est libre ou dont les eaux ne sont pas soutenues par

des barrages, il en existe peu qui soient à peu près constamment navigables, et, par conséquent, qui, pendant l'étiage, puissent offrir à la navigation une hauteur d'eau suffisante. Sans les barrages, un grand nombre de rivières n'auraient pas la hauteur d'eau nécessaire en temps de moyennes et de basses eaux, ou pendant les trois quarts de l'année. Cependant on ne peut établir des barrages sur toutes les rivières; en effet, la hauteur d'eau nécessaire à la navigation étant de $1^m.30$, si l'on donne $1^m.00$ de chute au barrage, comme il est nécessaire de réserver environ $0^m.70$ de hauteur de berge au-dessus du seuil, on reconnaît qu'il est dangereux d'en établir dans une rivière dont le lit a moins de $3^m.00$ de profondeur; d'ailleurs, sur une rivière navigable, un barrage doit être accompagné d'une écluse à sas, ouvrage dont l'établissement dans le lit même de la rivière ou sur l'une de ses rives, occasionne de fortes dépenses.

59. Il résulte de ce que nous venons de dire, que le lit des rivières sur lesquelles il est possible d'établir des barrages, doit avoir plus de $3^m.00$ de profondeur et une faible pente, afin que ces ouvrages et leurs accessoires qui coûtent si cher, ne soient pas trop multipliés; lorsque ces conditions ne sont pas remplies, il faut renoncer à rendre la rivière navigable au moyen de barrage; il est alors aussi économique qu'avantageux de préférer un canal latéral dont les écluses, beaucoup moins chères, peuvent

avoir une chute triple, et être par conséquent trois fois moins nombreuses.

Lorsqu'un canal peut être soutenu à une hauteur convenable au pied de l'un des versants de la vallée, et qu'il est disposé de manière à recevoir une partie notable du débit de la rivière, il peut, pendant les sécheresses, donner à l'agriculture les eaux nécessaires pour arroser toutes les terres comprises entre le pied de l'une de ses digues et la rivière; il peut encore, lorsque l'eau est surabondante, fournir à l'industrie tout ou partie de la force motrice dont elle a besoin. Un canal, établi dans ces conditions, cesse d'être onéreux et contribue puissamment à la prospérité de la contrée qu'il traverse. C'est assez nous arrêter sur les avantages que l'on peut obtenir de la navigation artificielle; revenons aux moyens d'améliorer la navigation naturelle que nous présente un grand nombre de rivières.

60. Nos grands fleuves ne présentent pas encore, à toute époque, une entière sécurité dans la partie que fréquente la navigation. Sur plusieurs points de leur cours, on rencontre des écueils plus ou moins dangereux; les barres et les îles qui se trouvent à leur embouchure sont des obstacles difficiles à franchir par les navires, même lorsque leur tirant d'eau ne s'élève pas au-dessus de $3^{m}.00$.

Le cours d'un fleuve, considéré dans son ensemble, sous le rapport du service de la navigation, présente trois parties distinctes; la première vers l'a-

mont n'est que flottable, la seconde est navigable au moyen du halage, et la troisième vers l'embouchure est quelquefois susceptible d'une navigation à la voile.

Le lit de ce fleuve est ordinairement à fond de gravier dans la partie supérieure; dans la partie moyenne, il est à fond de sable ou de menus graviers, et dans la partie inférieure, à fond de sable ou de vase.

Nous n'avons pas à nous occuper de la partie flottable dont le fond est ordinairement en gravier, car cette partie n'exige qu'une faible hauteur d'eau. En effet, pour qu'une rivière soit flottable, il suffit que son lit ait de la stabilité et soit débarrassé de tout ce qui peut faire obstacle au passage des trains, tels que rochers, bancs de gravier, troncs d'arbres, etc.; or, nous avons indiqué les moyens de donner au lit de la stabilité, et nous n'avons pas à décrire ici les procédés en usage pour débarrasser le lit d'une rivière des roches et troncs d'arbres qui font obstacle à la navigation.

Occupons-nous spécialement des moyens d'améliorer, sous le rapport de la navigation, la partie intermédiaire, celle à laquelle viennent s'assimiler toutes les rivières navigables au moyen du halage.

61. Lorsqu'une rivière à fond de gravier présente un grand nombre de bassins où la hauteur d'étiage est suffisante pour la navigation, mais qu'entre ces bassins se trouvent quelques seuils suivis de rapides

où la hauteur d'eau est trop faible ; dans ces parties, il faut laisser au courant la largeur nécessaire pour l'écoulement des grandes eaux, et faire en sorte que, pendant les basses eaux, il conserve une hauteur suffisante pour la navigation ; on atteint ce but en resserrant le lit d'étiage par des ouvrages assez solides pour résister à l'action des eaux et pour obliger cette action à approfondir elle-même le lit du courant.

Cependant, si le seuil et le fond du rapide étaient en rocher, en tuf ou autre matière capable de résister à l'action des eaux, il faudrait commencer par donner au lit la largeur et la profondeur qu'il doit avoir, au moyen de déblai et de dragages, puis établir, si cela est nécessaire, les ouvrages destinés à maintenir cette profondeur, en conservant, dans le bassin qui précède, une hauteur suffisante pour la navigation.

62. La trop grande largeur des rivières, en diminuant la hauteur de l'eau pendant une partie de l'année, est ce qui contribue le plus aux difficultés qu'éprouve la navigation.

Dans les rivières dont la section est trop large et trop aplatie, on essaye, lorsque les circonstances le permettent, de créer une passe ou un chenal en resserrant le lit par des digues submersibles en enrochement, afin que l'action des eaux, devenue plus intense par ce rétrécissement, augmente la profondeur du lit. Ces digues, qui ont pour objet de créer un nouveau lit d'étiage, doivent affleurer le niveau

des basses eaux, afin que les moyennes eaux puissent passer par-dessus sans obstacle. Quant à la position que le chenal doit occuper pour qu'il ait de la stabilité, pour qu'il puisse résister à l'action des grandes eaux, et même s'approfondir par cette action, il est nécessaire que son axe corresponde, par sa situation et sa direction, au filet de plus grande vitesse de la superficie, ou au fil de l'eau lors des crues; on conçoit, en effet, que si ce chenal affecte des sinuosités qui soient croisées plus ou moins obliquement par la direction de la vitesse pendant les crues, il éprouvera des avaries qui pourront être considérables, telles que plusieurs comblements partiels et l'ouverture de plusieurs brèches dans les digues. Le défaut de concordance entre la direction de la vitesse des crues et celle de la vitesse dans le chenal d'étiage est, suivant notre opinion, la principale cause du non-succès des digues submersibles qui ont été établies il y a quelques années dans le lit même de la Loire.

63. Les rivières à fond de vase ont une faible vitesse, leur pente est sensiblement constante, et leur lit est beaucoup plus régulier que celui des rivières à fond de gravier. Ces rivières jouissent d'une propriété particulière, qu'elles doivent aux herbes qui croissent sur leur fond et qui maintiennent dans leur lit une plus grande hauteur d'eau que celle des rivières dont le fond est dépourvu de toute végétation; ainsi la Lys, aux environ de Gand, est facilement navigable sur environ 70 kilomètres de lon-

gueur, bien que sa pente soit de $\frac{1}{2000}$; cependant cette rivière n'aurait point assez d'eau sans les herbes qui croissent dans son lit, et qu'il est défendu de couper; les herbes en augmentant la résistance due au frottement diminuent la vitesse de l'eau et permettent ainsi aux bateaux de remonter le courant avec assez de facilité.

64. Pour achever ce que nous voulions dire sur les rivières, nous nous arrêterons quelques instants sur les difficultés de remédier aux barres et aux dépôts qui se forment constamment à l'embouchure des fleuves; ici, l'action des eaux du courant est subordonnée à l'action des marées et à celle des vents, sur lesquelles l'homme ne peut rien. Quelquefois, cependant, on tourne la difficulté en ouvrant un canal entre un point du courant où la hauteur d'eau est convenable et où l'action de la mer ne se fait pas sentir, et un point de la côte facile à aborder en tout temps, et où les sables du courant ne forment aucun dépôt; mais ce canal, pour être d'une grande utilité, doit pouvoir livrer passage aux navires du commerce et avoir de grandes dimensions.

C'est pour éviter les difficultés que le Rhône présente à son embouchure, que l'on a ouvert le canal d'Arles au port de Boue; malheureusement ce canal a de trop petites dimensions; il faudrait ou augmenter sa section ou bien ouvrir dans sa direction un canal maritime pour recevoir des navires d'un fort tonnage et rendre à la ville d'Arles son ancienne prospérité.

### *VI. Des avantages de l'hydraulique sous le rapport de son application aux rivières et aux fleuves.*

65. Nous ne voulons pas terminer cette introduction sans appeler l'attention sur les avantages qui résultent de l'application de l'hydraulique à l'art de diriger et d'utiliser les eaux courantes dans l'intérêt des nations.

La science de l'hydraulique donne la solution d'une foule de questions qui se présentent journellement, lorsqu'il s'agit de modifier le régime des rivières. Quand on doit toucher au lit ou aux eaux d'un courant, il est sans doute nécessaire d'avoir une connaissance parfaite du courant dans ses divers états; mais cette connaissance seule est insuffisante, il faut encore, sous peine d'agir à l'aide d'un empirisme plus ou moins aveugle, recourir à l'hydraulique, lui emprunter ses formules pratiques et les appliquer à l'objet dont on s'occupe.

Si, par exemple, on veut dériver d'un courant un volume d'eau déterminé, soit pour l'irrigation, le service d'une usine, l'alimentation d'un canal, le remplissage d'un réservoir, l'hydraulique donne la section que le canal doit avoir, lorsque l'on connaît la pente dont on peut disposer; elle fait plus; elle détermine la forme qu'il convient de donner à cette section pour que l'eau éprouve le moins de résistance; elle détermine encore la pente qu'il faudra

donner lorsque la section du canal sera fixée par des circonstances locales; enfin, si l'on est maître de fixer la pente et la section, elle indique la forme la plus avantageuse et la pente la plus convenable pour que le canal conduise le volume demandé avec la plus petite section et la moindre résistance.

Lorsqu'il s'agit d'une rivière, l'hydraulique détermine le débit du courant à l'aide d'un profil longitudinal d'une portion de son cours, et d'un certain nombre de sections transversales. Si l'on veut modifier le régime ou apporter des changements notables au profil longitudinal du lit et à un certain nombre des sections transversales, l'hydraulique détermine la nouvelle forme qu'affectera le courant; elle va même plus loin, car elle indique comment doivent être modifiées les sections tranversales pour obtenir un effet déterminé; ce qui arrive quand on veut assurer au courant une hauteur, une largeur ou une pente constante, ou bien encore une hauteur, une largeur ou une pente variable suivant une loi connue.

L'hydraulique fait également connaître l'effet que produira sur la pente de la superficie et même sur la forme du lit, la suppression d'un bras, ou la division du cours en deux ou plusieurs bras; elle donne encore les moyens de prévoir les changements qu'un courant peut apporter à son lit, et, par suite, ce qu'il convient de faire pour donner à ce lit de la stabilité.

Lorsqu'il s'agit d'établir un pont, la connaissance

des débouchés que présentent les ponts situés à peu de distance en amont et en aval est un renseignement souvent utile, mais qui est quelquefois bien insuffisant; car il peut exister des circonstances locales qui obligent à donner au nouveau pont un débouché plus considérable, ou qui permettent de réduire ce débouché.

La Marne, à Vitry et à Châlons, dans le temps des crues, effectue son passage au moyen de quatre grands ponts, ayant ensemble 100$^{m}$.00 environ d'ouverture, tandis que la même rivière, après avoir reçu plusieurs affluents, passe sous le pont de Trilport, dont l'ouverture est à peine de 75$^{m}$.00.

Lorsque, sur le point où le pont doit être établi, on connaît la hauteur et le volume des plus grandes crues, l'hydraulique fait connaître le débouché qu'il convient de donner à cet ouvrage pour que la superficie du courant n'éprouve aucun changement, ou n'éprouve dans la partie d'amont, dans celle qui précède la construction, qu'une augmentation de hauteur fixée à priori.

Ce que nous venons de dire relativement au débouché d'un pont, convient également à la distance qu'il convient de laisser entre des murs de quais.

Lorsqu'on veut soutenir les eaux d'une rivière au moyen d'un barrage, l'hydraulique détermine la forme que prendra, après l'établissement du barrage, la superficie du courant dans chaque état de la rivière; elle détermine encore ou la hauteur, ou

la largeur à donner au barrage pour que cet ouvrage soit le plus favorable au débit qui correspond à un état donné de la rivière.

Les applications les plus fréquentes de l'hydraulique sont celles relatives aux distributions d'eau dans les villes, et à l'emploi de l'eau comme force motrice pour les besoins de l'industrie.

Quand il s'agit de distribution d'eau, l'hydraulique détermine la hauteur à laquelle le réservoir doit être soutenu pour que le liquide par sa pression puisse vaincre la résistance due au frottement dans les tuyaux, et s'élever à une hauteur donnée, si cela est nécessaire, à la sortie des différents orifices qui doivent être ménagés le long des conduites; elle détermine encore le diamètre et l'épaisseur qu'il suffit de donner aux tuyaux pour que l'effet que l'on veut produire ait lieu, et pour que ceux-ci puissent résister à la pression de l'eau.

Lorsque l'on doit employer la force motrice de l'eau pour les besoins de l'industrie, l'hydraulique aide à reconnaître le genre du récepteur qu'il convient de préférer, eu égard à l'effet à produire, au travail à effectuer; elle détermine ensuite les dimensions du récepteur et de tout ce qui en dépend, pour que la force motrice soit employée de la manière la plus avantageuse.

Nous terminerons là ce qu'il nous a paru nécessaire de dire pour donner une idée des services que l'hydraulique est susceptible de rendre; c'est d'ail

leurs par l'étude seule de cette science que l'on peut complétement reconnaître et apprécier tous les avantages que l'on peut en obtenir dans l'intérêt de la richesse publique et du bien-être des habitants.

# TRAITÉ

SUR

# LES MOTEURS.

## SECONDE PARTIE.

### MOTEURS INANIMÉS OU AGENTS PHYSIQUES EMPLOYÉS COMME MOTEURS.

1. Les agents physiques que l'on emploie comme moteurs, sont : l'eau, l'air et la vapeur, qui font partie des corps que l'on appelle fluides.

Un fluide est un amas de points matériels ou de molécules qui jouissent d'une extrême mobilité et cèdent à la plus légère impression ; cependant, ces molécules ne sont pas entièrement indépendantes les unes des autres, elles sont liées par une certaine cohésion que l'on appelle viscosité lorsqu'elle devient sensible.

2. L'air et les gaz restent toujours à l'état de fluides élastiques, malgré les variations de pression et de température auxquelles ils sont ordinairement soumis.

Les vapeurs, au contraire, se réduisent en liquides

lorsqu'on les comprime à un certain degré, ou quand on abaisse leur température.

Les liquides, ainsi que tous les corps de la nature, sont compressibles; cependant, ces corps le sont si peu sous les pressions auxquelles ils sont ordinairement soumis, que, sans qu'il puisse en résulter d'erreur, l'on peut les regarder comme absolument incompressibles dans les limites de nos besoins.

Les fluides se divisent donc en deux classes : les fluides *élastiques* ou compressibles, tels que l'air, les gaz et les vapeurs, et les fluides dits *incompressibles* ou les liquides tels que l'eau, l'huile, le mercure, etc.

Les fluides compressibles, qui parfois échappent à nos sens, sont doués d'une élasticité parfaite; ils peuvent, en conservant la même masse, changer à la fois de forme et de volume.

Les fluides incompressibles jouissent de cette propriété qu'on appelle *liquidité*, propriété qui est si merveilleuse qu'on aurait peine à la concevoir, si l'expérience de tous les instants ne nous l'avait rendue familière; par cette propriété, les liquides peuvent prendre une infinité de formes en conservant le même volume.

A une même température, mais à diverses pressions, les gaz et les vapeurs changent à la fois de forme et de volume et ne conservent que leur poids.

Les liquides, dans les mêmes circonstances, prennent toutes les formes en conservant leur volume et leur poids; tandis que les solides, sous les pressions

ordinaires, sont invariables de forme, de volume et de poids.

3. Les fluides jouissent de la faculté de transmettre également, en tous sens, les pressions que l'on exerce sur une partie quelconque de leur surface. Cette propriété caractéristique et fondamentale est une de celles qui les distinguent des solides; elle sert de base à la théorie de leur équilibre et de leur mouvement; elle est d'ailleurs un fait constaté par l'expérience et admis par tous les physiciens.

4. L'étude des lois qui régissent les mouvements des fluides est l'objet de l'hydrodynamique; mais cette science ne considérant que des fluides parfaits, c'est-à-dire sans adhérence et sans viscosité, et des liquides absolument incompressibles ou des fluides parfaitement élastiques, ne conduit pas à des résultats pratiques qui soient susceptibles d'une application immédiate. Cette lacune de la mécanique rationnelle sur un objet aussi important, a porté à déduire d'observations faites avec soin, des formules qui représentent, avec une exactitude suffisante et entre les limites des expériences, qui sont aussi celles de nos besoins, les lois du mouvement des fluides. L'ensemble des recherches théoriques et expérimentales, sur cet objet important, constitue aujourd'hui la science de l'hydraulique.

5. L'hydraulique a donc pour objet de déterminer, à l'aide d'observations bien faites et des principes de la mécanique rationnelle, les lois du mouvement des

fluides et d'en déduire des formules pratiques Cette science observe et interroge la nature, reconnaît et développe ses lois, puis donne les moyens d'apprécier les effets qui leur sont dus.

6. L'hydraulique s'occupant des lois du mouvement des fluides, doit présenter deux divisions distinctes : la première, qui sera pour nous l'hydraulique proprement dite, s'occupera des fluides incompressibles, et particulièrement de l'eau ; la seconde sera relative aux fluides élastiques, et particulièrement à l'air et à la vapeur d'eau ; l'analogie porterait à lui donner le nom d'*aéraulique*, mais comme elle est fréquemment désignée sous le nom de *pneumatique*, nous lui conserverons cette désignation.

7. L'hydraulique proprement dite devant s'occuper du mouvement des liquides et particulièrement de l'eau, afin de reconnaître les lois de ce mouvement et de les utiliser dans l'intérêt de nos besoins ; elle a ainsi pour objet d'étudier le mouvement de l'eau, et de donner les moyens d'employer ce liquide comme moteur. Or, nous devons faire observer que l'eau a deux modes d'action ; car ce liquide exerce une action directe lorsqu'il se meut librement dans les courants découverts, et même dans les canaux fermés ; il agit alors comme *moteur simple*. Le même liquide devient un moteur composé lorsqu'il transmet son action au moyen d'un corps intermédiaire, tel qu'un vase, une roue, un balancier, un piston ; ce corps intermédiaire, qui est un récepteur, s'appelle alors un *mo-*

*teur hydraulique*. Nous diviserons donc l'hydraulique proprement dite en deux sections : dans la première, dous étudierons les lois du mouvement de l'eau considérée comme moteur simple; l'étude des moteurs hydrauliques sera l'objet de la seconde.

8. La pneumatique, qui doit s'occuper du mouvement des gaz et des vapeurs, présentera également deux sections distinctes : dans la première, nous étudierons les lois du mouvement des gaz et des vapeurs dans les tuyaux ou canaux fermés; dans la seconde, nous étudierons les moteurs à air ou à gaz, et les moteurs à vapeur.

Nous ferons précéder ces diverses sections d'un exposé sommaire des principes de la mécanique rationnelle, dont nous ferons une constante application dans l'hydraulique.

## LIVRE PRÉLIMINAIRE.

### *Exposé sommaire des principes de mécanique nécessaires à l'intelligence de l'hydraulique.*

9. Dans la première partie de ce traité, nous avons déjà rappelé quelques-unes des notions élémentaires de mécanique dont nous devions faire un constant usage; nous supposerons donc ces notions connues, afin de ne pas nous répéter ici. Nous allons cependant compléter ces notions, et donner un exposé sommaire des principes généraux de

la mécanique, dont nous aurons occasion de faire de fréquentes applications.

10. Des forces qui se détruisent sont telles que, par elles-mêmes, elles ne tendent pas à produire le mouvement quand il n'existe pas, ni à modifier en rien celui qui est déjà produit par d'autres forces.

Des forces en équilibre ou des forces capables de produire l'équilibre sont des forces qui se détruisent toujours.

Dans un système en équilibre, les points d'application des forces ne peuvent prendre de mouvement que par l'action d'une nouvelle force.

11. On dit que deux systèmes de force sont équivalents, lorsqu'on peut passer de l'un à l'autre en y ajoutant des forces en équilibre.

12. Si, par une cause quelconque et pendant un temps très-court, on agit sur un système en équilibre de manière à lui causer un léger déplacement, alors chacun des points d'application des forces décrira un petit chemin dont la direction dépendra en même temps de celle de la cause qui produit le déplacement et de la liaison des points du système.

Chacun des petits chemins dont il vient d'être question s'appelle la *vitesse virtuelle* du point auquel il se rapporte, parce que ces chemins sont souvent proportionnels aux vitesses que peuvent prendre les points, puisque celles-ci sont toujours égales aux rapports entre les espaces parcourus et un temps infiniment petit employé à les parcourir.

13. On appelle *moment virtuel* d'une force le produit de cette force par la vitesse virtuelle de son point d'application projetée sur sa direction propre.

On appelle *action élémentaire* d'une force le produit de cette force par l'élément du chemin que décrit réellement son point d'application, pendant un instant infiniment petit, projeté sur la direction de la force; ou, ce qui revient au même, l'action élémentaire est le produit du chemin réellement décrit par la composante de la force suivant ce chemin.

14. Lorsque la vitesse virtuelle peut être le chemin réellement décrit par le point d'application de la force, alors le moment virtuel est égal ou se confond avec l'action élémentaire.

15. Quand un corps cède librement à l'action d'une force, il prend un mouvement. Le mouvement d'un corps, considéré comme un point matériel, se détermine par le principe suivant : *les mouvements imprimés par diverses forces se composent suivant les mêmes lois que les pressions dans la statique*, parce que les vitesses imprimées qui ont toujours les mêmes directions que les forces qui les produisent, sont proportionnelles à ces forces.

16. Au principe qui précède, nous ajouterons les trois suivants, dont toutes les lois de la mécanique sont des conséquences :

1° Le principe des vitesses virtuelles ou le principe général de statique;

2° Le principe de d'Alembert ou le principe général de dynamique;

3° Le principe général de la conservation des forces vives.

Nous allons donner sur chacun de ces principes les développements propres à en faire saisir l'esprit.

### *I. Principe des vitesses virtuelles.*

17. Les géomètres, en comparant entre elles les conditions d'équilibre dans les machines simples, ont trouvé, par induction, une loi qui s'observe dans tout système de force en équilibre. Voici en quoi elle consiste :

Si, pendant un instant très-court, on agit sur un système de force en équilibre de manière à causer un déplacement très-petit aux différentes parties de ce système, les points d'application des forces décriront des vitesses virtuelles; si, pour toutes les forces en équilibre, on fait la somme des moments virtuels en prenant négativement ceux de ces moments où la force agit en sens contraire de la vitesse virtuelle, cette somme sera toujours nulle, quelles que soient les vitesses virtuelles qu'on ait choisies. Réciproquement, si la somme des moments virtuels est nulle pour toute espèce de vitesses virtuelles différentes, les forces sont en équilibre.

Le principe que nous venons de faire connaître, ayant lieu dans tout système de forces en équilibre,

a par conséquent lieu dans l'équilibre de forces qui réagissent les unes sur les autres par l'intermédiaire d'un fluide.

La statique étant toute renfermée dans les applications du principe des vitesses virtuelles, il en est le résumé ou le principe général.

### *II. Principe général de dynamique.*

18. Le principe général de dynamique, que l'on doit à d'Alembert, a l'avantage de ramener toutes les questions de dynamique à des questions de statique. Ce principe a lieu soit que les vitesses des points et les directions des forces varient, dans un instant, d'une quantité infiniment petite ou d'une quantité finie, et donne les moyens de déterminer la nature du mouvement. Sa démonstration est si simple, que nous croyons devoir la rappeler succinctement.

19. Si l'on considère un système de points matériels ou de corps liés entre eux d'une manière quelconque, soumis à l'action d'un certain nombre de forces, les liaisons du système empêchent les corps de céder librement aux forces qui agissent sur eux. Le mouvement que prendrait chaque corps, s'il était libre, se décompose en deux autres : l'un que le corps prend effectivement, l'autre détruit par les liaisons du système. Le principe général de dynamique consiste en ce que les quantités de mouvement détruites

sont nécessairement telles qu'elles se font équilibre sur le système conformément aux lois de la statique; en effet, si cela n'était pas, les mouvements effectifs ne seraient pas ceux qui ont effectivement lieu.

20. Comme chaque quantité de mouvement perdue est la résultante de la quantité de mouvement imprimée, et de la quantité de mouvement effective prise en sens contraire, et que les quantités de mouvement perdues se détruisent ou sont en équilibre, il en résulte que les quantités de mouvement imprimées et les quantités de mouvement effectives sont des systèmes équivalents, et que, *dans tout système en mouvement, il y a équilibre entre les quantités de mouvement imprimées aux mobiles et les quantités de mouvement qui ont effectivement lieu, chacune de ces dernières étant prise en sens contraire de sa direction.*

### *III. Principe général de la conservation des forces vives.*

21. Le principe général des forces vives peut s'énoncer ainsi :

*Dans tout système de corps en mouvement, la somme des forces vives acquises par tous les corps du système, entre deux époques successives de son mouvement, est égale au double de la somme des quantités d'actions imprimées à ces corps entre les mêmes époques.*

Ce principe est une conséquence de ceux qui

précèdent, comme on va le reconnaître par ce qui suit :

22. Puisque, dans tout système en mouvement, les quantités de mouvement perdues ou gagnées à chaque instant, par les différents points matériels de celui-ci, doivent se faire équilibre, il suffit d'appliquer à ces forces le principe des vitesses virtuelles, pour avoir les équations du mouvement du système. Afin de faire cette application, réduisons toutes les forces qui agissent sur chaque point, en trois autres parallèles aux axes; soit X, Y, Z, ces trois forces pour le point dont la masse est $m$.

Les vitesses du point $m$ suivant les axes seront au bout du temps $t$, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ et $\frac{dz}{dt}$, les accroissements de ces vitesses pendant l'instant $dt$ seront $\frac{d^2x}{dt}$, $\frac{d^2y}{dt}$ et $\frac{d^2z}{dt}$.

Si le point $m$ était libre, les forces qui y sont appliquées lui imprimeraient, dans le sens des axes, les vitesses $Xdt$, $Ydt$, $Zdt$; les quantités de mouvement perdues par le point $m$, parallèlement aux axes, sont donc

$$m\left(Xdt-\frac{d^2x}{dt}\right),\ m\left(Ydt-\frac{d^2y}{dt}\right),\ m\left(Zdt-\frac{d^2z}{dt}\right).$$

Les autres points matériels du système donneraient lieu à des expressions analogues pour les quantités de mouvement perdues ou gagnées.

L'équilibre devant avoir lieu entre les quantités de mouvement ou entre les forces motrices perdues ou gagnées, il faut qu'en imprimant arbitrairement

au système, pendant un temps très-court, un des mouvements qu'il peut prendre, et en désignant par $\delta x$, $\delta y$ et $\delta z$ les projections sur les axes du petit chemin décrit par le point $m$, on ait, en vertu du principe des vitesses virtuelles

$$\Sigma m\left(Xdt-\frac{d^2x}{dt}\right)\delta x+\Sigma m\left(Ydt-\frac{d^2y}{dt}\right)\delta y+\Sigma m\left(Zdt-\frac{d^2z}{dt}\right)\delta z=0$$

le signe $\Sigma$ indiquant l'addition des termes analogues pour les différents points matériels.

Lorsque l'on pourra imprimer au système le mouvement qu'il a réellement à l'instant où on le considère, alors les vitesses des mobiles, suivant les axes, seront égales aux différentielles des coordonnées, c'est-à-dire que l'on aura $\delta x=dx$, $\delta y=dy$, $\delta z=dz$, ce qui donnera, après avoir divisé par $dt$,

$$\Sigma m\left(\frac{dx\,d^2x+dy\,d^2y+dz\,d^2z}{dt^2}\right)=\Sigma m\,(Xdx+Ydy+Zdz);$$

mais $s$ étant l'arc de la courbe réellement décrite par le point $m$, et $v$ la vitesse de ce point, on aura

$$v^2=\frac{ds^2}{dt^2}=\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2},$$

$$\text{ou } d\,v^2=2\left(\frac{dx\,d^2x+dy\,d^2y+dz\,d^2z}{dt^2}\right),$$

et par suite

$$\Sigma mv^2=2\Sigma\int m\,(Xdx+Ydy+Zdz)+C,$$

ou encore

$$\Sigma mv_1^2-\Sigma mv_0^2=2\Sigma\int m\,(Xdx+Ydy+Zdz)\ldots\ldots(1),$$

équation qui est l'expression analytique du principe

des forces vives et en justifie l'énoncé. Par conséquent, la force vive du système est véritablement indépendante des conditions de la liaison et de la nature des lignes décrites par les corps, et peut se calculer uniquement d'après les espaces que ces corps ont parcouru dans le sens de chaque force.

L'équation des forces vives n'est donc que l'intégrale de l'équation fournie par le principe général de dynamique, quand on peut prendre pour vitesses virtuelles, les vitesses effectives.

23. On peut transformer l'équation (1) afin d'en rendre les applications plus faciles; pour cela, désignons par P les forces qui agissent dans le sens du mouvement, par $dp$ les vitesses virtuelles des points matériels projetés sur les directions de ces forces; par Q les forces qui agissent en sens contraire du mouvement; enfin par $dq$ les vitesses virtuelles projetées sur ces forces. Le système des forces P et Q, étant équivalent au système des forces X, Y, Z, le principe des vitesses virtuelles donnera

$$\Sigma\,(\mathrm{P}dp - \mathrm{Q}dq) = \Sigma m\,(\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz),$$

et par suite

$$\Sigma m v_1^2 - \Sigma m v_0^2 = 2\int (\Sigma \mathrm{P}dp - \Sigma \mathrm{Q}dq) \ldots\ldots (2).$$

24. L'équation (2) que nous venons d'obtenir peut s'énoncer et se traduire ainsi :

*Dans tout système de corps en mouvement, la somme des quantités d'action développées par les forces motrices, diminuée de la somme des quantités d'action absorbées par les forces résistantes pendant un certain temps,*

*est égale à la moitié de la variation de la somme des forces vives qui a lieu dans le même temps.*

Il résulte encore de l'équation (2), que si, à un instant quelconque, le système était abandonné à lui-même, et qu'aucune force n'agît plus sur lui, la somme des forces vives qui aurait lieu à cet instant, se conserverait sans altération, quels que fussent ensuite les mouvements que les corps pourraient prendre les uns par rapport aux autres, et les variations que pourraient éprouver leur vitesse.

25. L'équation des forces vives, lorsqu'elle pourra être appliquée, suffira et sera très-commode pour déterminer le mouvement d'un système de points matériels soumis à l'action de différentes forces; cela arrivera toute les fois que $\Sigma m\,(Xdx + Ydy + Zdz)$ sera une différentielle exacte des trois variables $x$, $y$ et $z$; ce qui aura toujours lieu si les forces X, Y, Z, sont constantes ou sont invariables avec le temps, ou lorsqu'elles ne dépendent que des distances des points matériels du système à des points fixes. Mais si certaines forces varient avec le temps ou avec la vitesse, $\Sigma m\,(Xdx + Ydy + Zdz)$ ne pourra être une différentielle exacte; en effet, pour intégrer cette quantité, il faudrait y substituer d'abord les valeurs du temps et de la vitesse en fonction des coordonnées $x$, $y$, $z$, ce qui suppose le problème résolu.

26. Pour que l'équation des forces vives ait lieu, il est nécessaire qu'on puisse imprimer au système en équilibre, sous les forces perdues par la liai-

son, le mouvement qu'il a réellement. Voici comment Poisson démontre que cette condition ne peut être remplie qu'autant que la liaison du système est indépendante du temps : les conditions du système peuvent être exprimées par des équations données entre les coordonnées $x$, $y$, $z$, des points matériels; mais quelquefois ces équations contiendront la variable $t$ qui représente le temps, comme cela arrivera quand un des mobiles devra se trouver sur une surface ayant elle-même un mouvement propre; considérons ce dernier cas.

Soit donc $F(x, y, z, t) = o$, une des équations de condition du système; pour que le mouvement arbitraire qu'on imprime à ce système soit permis, il faut que les nouvelles coordonnées $x+\delta x$, $y+\delta y$, $z+\delta z$, satisfassent à cette équation; par conséquent, la différentielle de F, prise en regardant $t$ comme constante, doit être nulle, c'est-à-dire qu'on doit avoir

$$\frac{dF}{dx}\delta x + \frac{dF}{dy}\delta y + \frac{dF}{dz}\delta z = o.$$

Mais la différentielle complète de F, en regardant $x$, $y$, $z$ comme des fonctions de $t$, est

$$\frac{dF}{dt}dt + \frac{dF}{dx}dx + \frac{dF}{dy}dy + \frac{dF}{dz}dz = o.$$

En comparant cette équation à la précédente, on voit que pour que l'on puisse prendre $\delta x = dx$, $\delta y = dy$, $\delta z = dz$, il est nécessaire que le terme $\frac{dF}{dt}dt$ soit nul; ce qui arrivera toujours lorsque les équa-

tions de condition du système ne renfermeront point le temps explicitement.

Par conséquent, pour que le principe des forces vives soit immédiatement applicable, il est nécessaire 1° que les forces qui agissent sur le système soient indépendantes du temps (25), ce qui aura lieu lorsque ces forces seront constantes, ou lorsqu'elles ne dépendront que des distances des points matériels à des points fixes.

2° Que les conditions de la liaison du système soient également indépendantes du temps (26), ce qui aura lieu lorsque ces liaisons ne dépendront que de considérations géométriques.

27. Nous allons appliquer le principe des forces vives à un système de corps ou de points pesants. Pour faire cette application, remarquons d'abord que la force vive ayant pour expression $mv^2$, si $p$ est le poids de la masse $m$, on a $p = mg$, et, par suite, $mv^2 = \frac{p}{g} v^2$, mais $\frac{v^2}{2g}$ est la hauteur de laquelle devrait tomber dans le vide, un corps pesant pour acquérir la vitesse $v$, en désignant cette hauteur par $h$, on a $mv^2 = 2ph$, ou $ph = \frac{mv^2}{2}$.

La somme des quantités d'actions développées par des corps pesants, $p$, $p'$, $p''$, etc., tombant des hauteurs $h$, $h'$, $h''$, etc., sera donc égale à $ph + p'h' + p''h'' +$ etc., ou à la somme de tous les poids $p + p' + p'' +$ etc., que nous ferons égale à P, multipliée

par la hauteur H dont le centre de gravité est descendu.

On parviendrait à un résultat analogue, si certains poids s'étaient élevés pendant la descente des autres; alors la quantité d'action disponible serait égale à la différence entre les quantités d'action développées par les poids dont le centre de gravité serait descendu, et celles absorbées par les poids dont le centre de gravité serait monté ; ce qui fait dire que : *la quantité d'action développée ou absorbée par un système de poids en mouvement est égale au produit du poids total par la hauteur dont le centre de gravité s'est élevé ou abaissé.*

28. La proposition précédente suppose que les poids restent constants, ou qu'on en considère la même quantité pendant le mouvement. Si certains poids commencent à agir ou finissent d'agir sur le système à un instant qui ne soit pas le même pour les autres, alors la variation de la force vive du système ne peut plus être égale à la somme des poids multipliée par la hauteur dont a varié le centre de gravité, mais à la somme des produits de chaque poids par la hauteur dont chacun d'eux s'est élevé ou abaissé.

En général, les calculs relatifs à la variation des forces vives doivent s'appliquer à un même système, ou à un ensemble des mêmes particules matérielles; il faut suivre ces particules dans leur mouvement; et prendre leur vitesse au premier et au dernier instant (22); mais les calculs se simplifient quand, dans le mouvement d'un système de corps pesants, un

certain nombre de poids vient prendre la place qu'occupaient d'autres poids égaux, comme cela a lieu quand on considère une masse liquide en mouvement dans un canal ou un vase quelconque.

29. Pour démontrer ce que nous venons d'avancer, considérons des poids dont la somme constante est égale à P ; soient $h_0$ et $h_1$, les distances verticales du centre de gravité de la somme P, au premier et au dernier instant, à un plan horizontal supérieur, $P(h_1 - h_0)$ sera la quantité d'action que développe le système lorsque son centre de gravité descend de la hauteur $h_0$ à la hauteur $h_1$.

Si nous désignons par $p$ une partie du poids P formée par une suite de particules qui, au dernier instant, occupent l'espace laissé libre par la descente du système, il en résulte qu'en appelant $H_0$ la distance verticale, au-dessous du plan horizontal, du centre de gravité du poids entrant $p$, et en désignant par $h$ la distance analogue pour le reste du poids $P - p$, les propriétés connues du centre de gravité donneront $Ph_0 = pH_0 + (P - p)h$.

Si maintenant nous considérons la partie inférieure du système, au moment où le centre de gravité du poids total P est descendu à la hauteur $h_1$, le centre de gravité de $P - p$ sera encore à la hauteur $h$; quant au centre de gravité du poids sortant $p$, il se trouvera à une hauteur que nous désignerons par $H_1$, on aura donc encore $Ph_1 = (P - p)h + pH_1$, et, par suite, $P(h_1 - h_0) = p(H_1 - H_0)$.

Par conséquent, la quantité d'action développée par le système, pendant la sortie du poids $p$, est précisément égale à la quantité d'action que ce poids développerait s'il passait directement de la position qu'il occupait en haut à celle qu'il vient occuper vers le bas.

30. Si, au lieu d'un système de poids, on considère une masse de liquide sortant de l'extrémité d'un tuyau ou d'un canal, et remplacée à la partie d'amont par une masse égale, la quantité d'action développée par la pesanteur agissant sur tout le système, sera précisément la même que si la masse d'eau écoulée était passée directement de l'emplacement abandonné en haut à l'emplacement nouvellement occupé en bas.

Lors donc qu'un courant sera alimenté par des sources donnant dans chaque seconde un produit constant dont la masse soit M, la quantité d'action imprimée par la pesanteur, au courant, dans chaque unité de temps, sur une étendue comprise entre deux points ou deux sections déterminés, sera égale au poids de la masse M, multipliée par la différence de niveau de son centre de gravité au premier et au dernier instant.

Si $l$ est la distance des deux sections extrêmes, $h_0$ et $h_1$ les hauteurs du centre de gravité de la portion du courant que l'on considère avant et après la durée d'une seconde, H la différence de niveau du centre de gravité de la masse M, dans les deux posi-

tions extrêmes, $\omega$ une section quelconque du courant, $\pi$ le poids de l'unité de volume du liquide.

L'intégrale $\int \omega dl$, prise entre les sections extrêmes, sera le volume de la partie du courant que l'on considère; la quantité d'action développée par ce courant, pendant l'écoulement de la masse M, sera donc $\pi (h_1 - h_0) \int \omega dl = MgH$.

Si donc l'on considère une certaine masse d'eau sortant horizontalement d'un réservoir entretenu constamment plein, la quantité d'action due à la descente très-peu sensible de l'eau contenue dans le réservoir, sera égale à celle que développerait la même masse en descendant de la tranche supérieure du réservoir pour aller occuper l'espace où elle se trouve après l'écoulement.

Coriolis, dans son *Essai sur les Machines*, fait observer que cela est évident lorsqu'on tire de l'eau de la superficie, parce qu'alors cette eau descend de toute la hauteur de la retenue; mais que cela cesse de l'être quand on ouvre une vanne de fond, car ce n'est pas l'eau qui occupait la tranche supérieure que l'on voit sortir par la vanne; cependant la quantité d'action développée est précisément la même que si cette eau fût descendue sans que le reste du liquide eût pris part au mouvement.

31. Le principe de la conservation des forces vives suppose que les courbes décrites par les mobiles sont continues et que leurs vitesses ne varient, dans chaque élément du temps, que d'une quantité très-

petite. Lorsqu'au contraire les vitesses varient de quantités finies en grandeur et en direction, le principe des forces vives n'est plus applicable. Pour apprécier, dans cette circonstance, la quantité d'action perdue ou celle qui reste au système, supposons que par une cause quelconque, à un instant déterminé, la vitesse $v$ des points du système varie, dans cet instant, d'une quantité finie en grandeur et en direction et devienne $v'$, si l'on désigne par $u$ la vitesse détruite, elle sera représentée en grandeur et en direction par le troisième côté du triangle construit avec $v$ et $v'$. Si, dans le triangle ainsi formé, on désigne par $(v'u)$ l'angle de la direction de $v'$ avec celle de $u$, on aura $v^2 = v'^2 + u^2 - 2v'u \cos(v'u)$, et par suite $\Sigma mv^2 = \Sigma mv'^2 + \Sigma mu^2 - 2\Sigma mv'u \cos(v'u)$.

D'après le principe général de dynamique, les vitesses $u$ doivent être telles que si tous les points du système étaient respectivement animés des quantités de mouvement $mu$ dues à ces vitesses, il y aurait équilibre; par conséquent, d'après le principe des vitesses virtuelles on doit avoir $\Sigma mu\delta s = o$, $\delta s$ étant la vitesse virtuelle du point $m$, ou le petit espace que ce point parcourrait dans le sens de $u$, si l'on imprimait au système un mouvement très-petit.

Lorsque le mouvement imprimé est celui-là même que prend le système, on a $\delta s = v'\cos(v'u)\, dt$, c'est-à-dire que $\delta s$ est alors égal à la projection sur la direction de $u$ du petit espace $v'dt$ réellement parcouru par le point $m$ dans la direction de $v'$. On doit donc avoir

$\Sigma mv'u \cos(v'u) = 0$ et par suite $\Sigma mv'^2 = \Sigma mv^2 - \Sigma mu^2$, c'est-à-dire que la somme des forces vives conservées par le système, après le changement brusque, est moindre que celle que le système possédait auparavant. *La somme des forces vives perdues est précisément égale à celle qu'aurait le système, si les points matériels étaient animés des vitesses qu'ils ont réellement perdues lors du changement brusque.*

Ce théorème qui complète le principe des forces vives est dû à Carnot, qui l'a établi dans son travail sur les machines.

32. Dans le court exposé qui précède, nous avons rappelé 1° que les vitesses ayant toujours les directions des forces et leur étant proportionnelles, se composent nécessairement suivant les mêmes lois ;

2° Que le principe des vitesses virtuelles, trouvé par induction, sert de base à toute la mécanique rationnelle, puisque le principe général de dynamique n'en est qu'une conséquence, et que l'équation des forces vives n'est que l'intégrale de l'équation fournie par le principe général de dynamique.

Comme nous aurons occasion de faire de fréquentes applications du principe de la conservation des forces vives, nous avons cru devoir donner, sur ce principe, les développements convenables ; ainsi nous avons fait voir qu'il était rarement applicable lorsque les forces qui agissent sur le système et les conditions relatives aux liaisons étaient des fonctions du temps ;

qu'il était, au contraire, d'une application facile et avantageuse lorsque les forces étaient constantes, ou lorsqu'elles ne dépendaient que des distances des mobiles à des points fixes, et que les conditions relatives aux liaisons ne dépendaient que de considérations géométriques.

Lorsque les vitesses des points matériels d'un système éprouvent des changements brusques, le principe des forces vives n'est plus applicable ; dans cette circonstance, la somme des forces vives perdues, qui est toujours égale à la différence entre les sommes des forces vives possédées par le système avant et après le changement brusque, est de plus égale à la somme des forces vives qui aurait lieu, si chaque point était animé de la vitesse qu'il a réellement perdue.

Nous terminerons ici ce qu'il nous a paru nécessaire de dire sur les principes de la mécanique rationnelle applicable à l'objet que nous avons en vue.

# PREMIÈRE DIVISION.

## HYDRAULIQUE PROPREMENT DITE.

### SECTION PREMIÈRE.

### *De l'eau considérée comme moteur simple*

#### LIVRE PREMIER.

#### *Théorie générale de l'hydraulique.*

##### I. Considérations générales.

33. L'eau est, de tous les liquides, le plus abondamment répandu dans la nature; il forme les océans, les mers, les lacs, fleuves et rivières, et recouvre les trois quarts de la surface du globe.

Comme tous les liquides permanents, l'eau est un corps matériel à peu près incompressible, composé de molécules infiniment mobiles et presque sans adhérence. Lorsque ce liquide est pris à son maximum de densité, le poids du mètre cube est de 1000 kilogrammes; lorsqu'il est congelé, le poids du même volume n'est plus que de 930 kilogrammes.

Lorsque l'eau est en repos, sa surface est toujours horizontale affectant un niveau parfait. Elle s'écoule sous la moindre pente, et repousse tous les corps qu'on y plonge avec une force égale au poids du fluide déplacé.

34. L'eau en mouvement se présente à nous dans quatre circonstances distinctes :

1° Elle est précipitée des nuages sur la terre à l'état de pluie ou en gouttes plus ou moins ténues et plus ou moins rapprochées;

2° Elle coule à la surface du sol ou dans des canaux naturels, tels que les ruisseaux, les rivières et les fleuves, ou dans des canaux artificiels, tels que ceux que l'on établit pour l'irrigation, pour l'approvisionnement des villes, pour l'alimentation d'un réservoir ou d'une usine;

3° L'eau coule encore dans des canaux souterrains et dans des tuyaux de conduite ou canaux fermés;

4° Enfin l'eau sort d'un réservoir par un orifice, pour être ensuite employée à divers usages.

Les eaux pluviales, si nécessaires à la nutrition et au développement des plantes, sans lesquelles toute culture serait infertile, alimentent les ruisseaux, rivières et fleuves, soit en s'y rendant directement peu après leur chute, soit en y arrivant à l'état de source, après avoir circulé plus ou moins longtemps dans le sol, sur ou sous des couches imperméables. Ces eaux, auxquelles nous devons toutes nos richesses agricoles, lorsqu'elles sont convenablement conduites ou aménagées, fournissent encore à l'homme la force motrice nécessaire à l'activité de ses fabriques. On peut donc dire que les eaux pluviales sont la source de nos principales richesses, puisque les plantes qu'elles développent fournissent à l'homme et aux animaux

des substances alimentaires, et à l'industrie des matières à transformer, tandis que les cours d'eau donnent la force nécessaire pour opérer cette transformation. Les gouttes de pluie bien employées peuvent donc puissamment contribuer à répandre sur la terre le bien-être et l'aisance, et tarir ainsi la source des larmes que font verser les besoins et la misère.

On tire peu de parti de la force motrice des eaux pluviales au moment de leur chute ; cependant, dans certaines localités dont le sol est accidenté, on utilise une partie de cette force en recueillant les eaux de pluie dans des réservoirs ou étangs que l'on établit dans des gorges, vallons ou dépressions, d'où on les dérive pour les besoins de l'industrie, et aussi pour ceux de l'agriculture et de la navigation. Faisant donc abstraction des eaux pluviales dont la force motrice n'est pas utilisée, il nous restera à considérer et à étudier :

1° Le mouvement de l'eau dans les courants découverts;

2° Le mouvement de l'eau dans les canaux fermés ou dans les tuyaux de conduite;

3° Le mouvement de l'eau qui sort d'un réservoir.

Ces considérations et études seront l'objet de trois livres distincts qui feront suite à la théorie générale que nous allons exposer.

35. L'eau naturellement en mouvement dans les ruisseaux, les rivières et les fleuves, est un moteur aussi puissant qu'économique que l'homme utilise

depuis les temps les plus reculés. *Les rivières sont des chemins qui marchent*, a dit Pascal; aussi le premier usage que l'on ait fait des cours d'eau a-t-il été de placer, sur un radeau ou dans une barque, des corps pesants, qui sont ainsi soutenus et transportés dans la direction du courant.

36. Lorsqu'un courant d'eau coule en masse continue dans un vase, lit ou canal, fermé ou découvert, à section quelconque, et que ce courant est alimenté par une quantité d'eau qui varie à chaque instant, la vitesse variant avec le temps et avec l'espace, le mouvement est nécessairement varié. L'eau qui se meut dans un vase ou un réservoir qui se vide ou seulement dont le niveau varie pendant l'écoulement, forme aussi un courant dont le mouvement est varié.

37. Lorsqu'un courant est alimenté par une quantité d'eau constante dans chaque unité de temps ou sort d'un vase entretenu constamment plein, et que chaque section du vase, lit ou canal reste invariable de forme et de position, on dit que ce courant a un mouvement *permanent*; dans ce courant, la vitesse, en chaque point d'une même section, reste constamment la même, et est, par conséquent, indépendante du temps.

38. Lorsque la section d'un courant permanent reste constante de surface, la vitesse l'est également, le mouvement est permanent et uniforme, mais la pente peut être variable.

Lorsque la pente d'un courant à section constante est elle-même constante, le mouvement est encore permanent et uniforme, mais la pente du courant est nécessairement constante.

Pour abréger, nous appellerons *courant à mouvement uniforme et à pente constante*, tout courant dont la section et la pente sont constantes;

*Courant à mouvement simplement uniforme*, tout courant dont la section seule est constante;

*Courant à mouvement permanent*, tout courant alimenté par un produit constant;

*Courant à mouvement varié*, tout courant dont la section et la pente sont variées, et qui est alimenté par un produit qui varie pendant le temps qu'on le considère.

39. La plupart des cours d'eau naturels ou artificiels sont, chaque année, pendant un temps plus ou moins long, des courants permanents.

Lorsqu'un canal de dérivation alimente une usine d'un volume d'eau constant, le mouvement du liquide dans le canal est permanent.

L'eau des ruisseaux alimentés par des sources d'un produit constant, a un mouvement permanent, et tant que dure la constance de ce produit, le ruisseau est à un état permanent.

Il en est de même des parties du cours des rivières et des fleuves comprises entre les principaux affluents; ces parties ont, chaque année, pendant un temps plus ou moins long, un mouvement permanent.

Lorsque le produit des sources ou celui des affluents vient à changer, dans le moment où le niveau varie, il n'y a plus permanence; mais lorsque le produit est de nouveau constant, sans être le même qu'il était d'abord, le mouvement est redevenu permanent, et le courant est dans un état permanent différent du premier.

Les rivières et les fleuves présentent ainsi, chaque année, plusieurs états de permanence dont la durée varie avec le nombre des jours pendant lesquels les différents points de leur surface restent à un niveau constant; mais, parmi ces différents états, on en distingue trois principaux, qui sont :

1° L'état permanent des basses eaux, que l'on appelle aussi régime d'étiage; il dure, chaque année, pendant un mois ou six semaines;

2° L'état permanent des moyennes eaux; sa durée varie de quatre à six mois;

3° L'état permanent des hautes eaux ou le régime des crues, qui, en général, a peu de durée.

### II. Des pressions qui agissent sur les liquides en mouvement.

40. Lorsqu'un liquide se meut, il est sollicité par la pesanteur qui agit sur chacune de ses molécules, et par les pressions qui s'exercent sur certaines parties de sa surface; son mouvement est d'ailleurs contrarié par certaines résistances dont nous ferons d'abord abstraction, mais que nous distinguerons

et apprécierons lorsque le temps en sera venu.

Nous avons déjà une idée de l'action que la pesanteur exerce sur une masse liquide, occupons-nous actuellement des pressions.

41. Pour apprécier l'action due aux pressions, distinguons la pression extérieure ou indépendante de la masse, laquelle est due à une action qui s'exerce sur la surface du liquide, de la pression qui est due à la pesanteur. Ces deux pressions s'ajoutent pour former la pression totale qui s'exerce en chaque point.

42. Lorsqu'une pression agit sur une portion quelconque de la surface d'un fluide en repos, elle se transmet sans altération à toutes ses parties, car les molécules de tout fluide étant extrêmement mobiles, la masse ne peut être en équilibre sans que toutes ses molécules ne supportent, dans tous les sens, des pressions égales.

Si P est la mesure de la pression extérieure par unité de surface, sa mesure, sur une section ou portion de surface représentée par $\omega$, sera $P\omega$.

43. La pression due à la pesanteur varie avec la hauteur du point que l'on considère; pour déterminer cette pression, lorsque le fluide est en repos, concevons un vase à fond horizontal rempli d'eau et posé sur un plan fixe, la surface de l'eau sera plane et horizontale, c'est ce qu'on appelle son niveau. La pression au niveau de l'eau étant supposée nulle, chaque élément $d\omega$ du fond du vase est pressé par le

poids d'une colonne d'eau ayant pour base cet élément et pour hauteur celle $z$ de l'eau sur le fond, $\pi$ étant le poids de l'unité de volume d'eau, et $p$ la pression rapportée à l'unité de surface, on aura

$$pd\omega = \pi z d\omega \text{ ou } p = \pi z, \text{ et } z = \frac{p}{\pi}$$

c'est-à-dire que $\frac{p}{\pi}$ représente la hauteur de la colonne à laquelle est due la pression.

Si la paroi qui supporte la pression est plane mais non horizontale, tous ses points ne seront pas également pressés; cependant, la pression $p$ de l'un de ses éléments sera encore exprimée par $pd\omega = \pi z d\omega$, la pression sur la paroi sera donc égale à

$$\int pd\omega = \pi \int z d\omega = \pi \omega z,$$

en désignant par $z$ l'ordonnée du centre de gravité. La pression ne dépend donc que de l'étendue de la paroi et de la profondeur de son centre de gravité au-dessous du niveau de l'eau. Par conséquent, la pression exercée par un liquide contre une section quelconque est égale au poids d'un prisme de liquide ayant pour base l'aire de cette section, et pour hauteur la distance du centre de gravité à la surface du liquide, ce qui fait dire que chaque point des parois d'un vase qui contient un liquide en repos supporte une pression *due à la hauteur du liquide au-dessus de ce point*.

Pour déterminer le centre de pression, c'est-à-dire le point où passe la résultante des pressions, il faut

remarquer que si tous les points de la paroi étaient également pressés, le centre de pression se confondrait avec le centre de gravité, comme cela a lieu sur une paroi plane et horizontale; mais, si la paroi plane est verticale ou inclinée, comme alors la pression augmente avec la profondeur, il s'ensuit que dans une section pressée par un liquide en repos, le centre de pression sera toujours plus bas que le centre de gravité.

44. Nous l'avons déjà dit; dans un liquide en repos, une molécule éprouve les mêmes pressions dans tous les sens; mais, dans un liquide en mouvement, chaque molécule est inégalement pressée, et les pressions qu'elle éprouve présentent des différences d'autant plus grandes que la vitesse du liquide est plus considérable.

Cependant, si un courant a un mouvement rectiligne et uniforme, la pression des molécules entre elles, en vertu de la pesanteur, suit la même loi que durant l'état d'équilibre, car le liquide ayant un mouvement rectiligne et uniforme, les forces qui le sollicitent sont en équilibre, et les pressions qu'il éprouve ou qu'il exerce sont les mêmes que dans l'état de repos.

La même loi a encore sensiblement lieu lorsque le liquide a un mouvement permanent ou varié, mais lent ou peu rapide, car cette lenteur ne peut avoir lieu que dans un état voisin de l'équilibre. Dans ces circonstances, si nous considérons une portion de

courant comprise entre deux sections verticales très-rapprochées et perpendiculaires à la direction du mouvement, nous pourrons donc admettre que la pression qui s'exerce sur l'une des sections, se transmet à l'autre section, suivant la même loi que si le liquide était en repos.

Si, à la sortie d'un orifice quelconque, chacune des molécules de la masse liquide qui sort de cet orifice, décrit à peu près la même courbe que si elle était libre et isolée, la pression à l'intérieur du liquide est alors la même qu'à l'extérieur; en effet, chaque molécule ou plutôt chaque file de molécule se mouvant comme si elle était libre et isolée, il faut bien que les pressions latérales se détruisent, et, par conséquent, qu'elles soient égales à la pression extérieure.

Comme les filets fluides qui sortent d'un orifice ont bien rarement des directions parallèles, que ces directions sont ordinairement convergentes, il en résulte que la pression intérieure est, dans ces circonstances, un peu plus grande que la pression extérieure.

### III. Théorie du mouvement varié d'une masse liquide continue.

45. D'après ce qui a été dit précédemment, nous devons considérer tout liquide comme un fluide incompressible, composé de molécules susceptibles de se déplacer les unes par rapport aux autres, sans offrir

de résistance sensible. L'application des lois de la dynamique à un pareil système présente aujourd'hui de très-grandes difficultés, car la théorie mathématique du mouvement des fluides est encore peu avancée, et ce n'est qu'en restreignant l'étendue des questions que l'on parvient à des résultats généraux utiles dans la pratique et conformes à l'expérience. Si, par exemple, on veut déterminer les lois du mouvement d'une masse continue de liquide dans un vase, canal ou tuyau quelconque, on ne s'occupe pas du mouvement réel de chaque molécule, mais l'on part d'un fait qui résulte de l'incompressibilité du liquide; c'est que dans toute masse liquide en mouvement, à un instant donné, et pendant un temps déterminé, il passe par toutes les sections du vase, canal ou tuyau le même volume de liquide.

Tant que dure le mouvement de cette masse, chaque molécule est, en général, animée d'une vitesse différente; mais la différence des vitesses sera toujours peu considérable, si le mouvement du liquide est lent ou peu rapide. En effet, si l'on prend un vase non prismatique dont les sections inégales ne varient cependant que par degrés insensibles, et dont le fond soit percé d'un petit orifice, et que l'on remplisse ce vase d'un liquide maintenu à un niveau constant pendant l'écoulement, l'orifice étant très-petit, par rapport aux sections du vase, le mouvement sera très-lent dans la partie supérieure du vase, et l'on pourra rendre les effets de ce mouvement sensibles

à la vue, en mêlant au liquide une matière ténue d'égale densité, telle que de la sciure de bois, qui reste en suspension et prenne le mouvement des molécules liquides. On voit alors que dans la partie supérieure du vase, les molécules sont animées d'un mouvement vertical qui est sensiblement le même pour toutes celles qui se trouvent sur une même section horizontale, de sorte que les tranches descendent parallèlement à elles-mêmes, en se contractant ou se dilatant suivant que l'exigent les variations des sections transversales. Dans la partie inférieure du vase, le mouvement n'a plus lieu par sections, mais par filets qui convergent vers l'orifice, et les molécules liquides qui occupent les angles, lorsqu'ils ne sont pas arrondis, y restent à peu près en repos.

D'après ce qui précède, on peut considérer une masse liquide en mouvement comme composée d'une infinité de tranches très-minces et égales en volume dont les bases ou sections sont perpendiculaires à l'axe du vase, canal ou tuyau, et admettre que chaque tranche reste formée des mêmes molécules fluides pendant toute la durée du mouvement. Une tranche quelconque prend ainsi la place de celle qui la précède immédiatement, par conséquent, sa section augmente ou diminue, selon que le vase, canal ou tuyau s'élargit ou se rétrécit, et, en même temps, son épaisseur varie en raison inverse de la section.

Cette hypothèse que l'on appelle l'*hypothèse du parallélisme des tranches*, simplifie beaucoup la question,

puisqu'au lieu de s'occuper du mouvement de chaque molécule, il suffit de considérer le mouvement d'une tranche que l'on regarde en quelque sorte comme un corps d'un volume déterminé, susceptible seulement de changer de forme.

46. Considérons actuellement une masse continue d'un liquide incompressible, homogène, qui coule d'un mouvement varié dans un vase, lit ou canal.

Soit *abcd* (fig. 11), cette masse de liquide qui se meut dans un vase, lit ou canal ABCD, dont les sections transversales varient d'une manière continue ou par degrés insensibles, et dont l'axe MN est une courbe quelconque; nous aurons à trouver en fonction des données de la question, les relations qui existent, pour chaque section, entre la pression, la vitesse et le temps. Mais, avant de déterminer ces relations, occupons-nous de la propriété fondamentale du mouvement varié; à cet effet, appelons $\omega$ l'aire d'une section quelconque $\alpha\beta$, dont la vitesse soit $u$; $\omega'$, $\omega''$, etc., seront d'autres sections aussi quelconques dont les vitesses soient $u'$, $u''$, etc.

Le liquide étant incompressible et la masse en mouvement étant continue, il en résulte que *pour une même époque du mouvement*, le produit de l'aire de chaque section, par la vitesse commune ou par la vitesse moyenne des différents points de cette section, doit être constant. Ce produit peut d'ailleurs varier d'une époque à une autre, et même d'un instant à un autre, en sorte qu'il est nécessairement une fonc-

tion du temps. L'expression analytique de la propriété fondamentale du mouvement varié est donc

$$\omega u = \omega' u' = \omega'' u'' = f(t).$$

Ce qui fait dire que pour un même instant du mouvement, la vitesse aux différentes sections est en raison inverse de l'aire de ces sections.

La propriété fondamentale du mouvement varié donne encore $\omega u dt = \omega' u' dt = \omega'' u'' dt$, etc., et comme $udt$ est le petit chemin $ds$ décrit par le centre de chaque section, il en résulte que

$$\omega ds = \omega' ds' = \omega'' ds'', \text{ etc.},$$

ou que le mouvement de la masse liquide peut être assimilé à celui d'un système de tranches infiniment minces normales à l'axe du vase, canal ou tuyau. Ces tranches ayant toutes le même volume, une tranche occupe dans le vase ou canal à la fin de chaque élément du temps, l'espace qu'occupait au commencement de cet élément la tranche qui la précède immédiatement.

Le volume de chaque tranche étant $\omega ds$, si l'on représente par $\pi$ le poids de l'unité de volume du liquide, le poids de la tranche sera $\pi\omega ds$, et sa masse $\frac{\pi}{g}\omega ds$, $g$ étant toujours l'intensité de la pesanteur.

47. Cherchons actuellement les relations qui, pour chaque section, existent entre la pression, la vitesse et le temps; admettons d'abord que la masse liquide que nous considérons soit seulement soumise à l'ac-

tion de la pesanteur et de certaines pressions, ou que le liquide n'éprouve aucune résistance, soit de la part du frottement contre les parois, soit de la viscosité du liquide, ou de l'adhésion des molécules entre elles. Le mouvement de cette masse étant varié, c'est-à-dire la vitesse, en chaque point d'une même section, variant avec le temps, on ne peut appliquer, dans cette circonstance, le principe des forces vives. On obtiendrait facilement les équations du mouvement par l'application du principe général de dynamique, mais on y parviendra plus facilement encore par la méthode que nous allons suivre.

Appelons $\Omega_0$ et $\Omega_1$ les sections supérieure et inférieure de la masse que nous considérons $u_0$ et $u_1$;

$P_0$ et $P_1$ les vitesses et les pressions par unité de surface qui correspondent à ces sections;

$\omega$, une section quelconque;

$u$ et $p$ la vitesse et la pression qui correspondent à cette section;

$z_0$ la distance verticale entre un plan horizontal fixe et le centre de gravité de la section supérieure;

$z_1$ la distance analogue pour la section inférieure;

H la distance verticale entre le niveau de l'eau et le centre de gravité de la section inférieure, on a donc $H = z_1 - z_0$;

$z$ la distance verticale entre le plan horizontal fixe et le centre de gravité de la section $\omega$;

$s_0$ la longueur du lit ou canal entre un point fixe pris sur l'axe et la section supérieure;

$s_{,}$ la longueur analogue pour la section inférieure;

$s$ la longueur du lit ou canal entre le point fixe pris sur l'axe et la section $\omega$;

$l$ la longueur totale du lit entre les sections extrêmes, on a donc $l = s_{,} - s_{0}$.

Remarquons maintenant que chaque tranche est soumise à deux pressions, dirigées en sens contraire, qui s'exercent sur les sections qui lui servent de base; c'est la différence de ces pressions et l'action de la pesanteur qui produisent le mouvement.

$p$ étant la pression rapportée à l'unité de surface qui s'exerce dans le sens du mouvement, en chaque point de la section d'amont; la pression qui s'exerce dans le même sens, sur la section d'aval, sera $p + dp$.

Comme la réaction est égale à l'action, $p + dp$ sera aussi la pression rapportée à l'unité de surface que la section d'aval éprouve en sens contraire du mouvement, de la part du liquide inférieur à la tranche que nous considérons.

$\omega$ étant l'aire de la section d'amont de la tranche, l'aire de la section d'aval sera $\omega + d\omega$, puisque les sections varient par degrés insensibles.

La pression totale exercée dans le sens du mouvement, sur la section d'amont, étant $p\omega$, la pression exercée en sens contraire, sur la section d'aval, sera $(p + dp)(\omega + d\omega)$.

La pression $p$, qui s'exerce sur la section d'amont, se transmet sur la section d'aval, et, lorsque le mouvement est lent, on admet que cette transmission se

par rapport à $t$ et par rapport à $s$, en observant que dans la première différentiation on doit considérer $s$ et par suite $\omega$ comme constants, et dans la seconde $t$ et par suite $u_{,}$ comme constants, donnera

$$\frac{du}{dt} = \frac{\Omega_{,}}{\omega}\frac{du_{,}}{dt}, \text{ et } \frac{du}{ds} = -\frac{u_{,}\Omega_{,}}{\omega^2}\frac{d\omega}{ds}.$$

Substituant l'équation (2) devient

$$dp = \pi dz + \frac{\pi}{g}\Omega_{,}^2 u_{,}^2 \frac{d\omega}{\omega^3} - \frac{\pi}{g}\Omega_{,}\frac{du_{,}}{dt}\frac{ds}{\omega}. \ldots (3).$$

Intégrant par rapport à $z$, à $s$ et à $\omega$, et observant qu'alors les quantités $u_{,}$ et $\frac{du_{,}}{dt}$, qui sont seulement fonction du temps, doivent être regardées comme constantes, il viendra

$$p = \pi z - \frac{\pi}{2g}\frac{\Omega_{,}^2 u_{,}^2}{\omega^2} - \frac{\pi}{g}\Omega_{,}\frac{du_{,}}{dt}\int\frac{ds}{\omega} + c.$$

La constante $c$ dépend de la pression que supporte la surface supérieure du liquide; supposons que cette pression soit celle de l'atmosphère, et représentons-la par $P_0$, comme au niveau de cette surface on a $\omega = \Omega_0$, $z = z_0$ et $s = s_0$, et que nous pouvons admettre qu'à cette surface l'intégrale $\int\frac{ds}{\omega} = o$, on aura pour déterminer la constante $c$,

$$P_0 = \pi z_0 - \frac{1}{2}\frac{\pi}{g}\frac{\Omega_{,}^2 u_{,}^2}{\Omega_0^2} + c,$$

et, par suite,

$$p = P_0 + \pi(z - z_0) - \frac{\pi}{g}\Omega_{,}\frac{du_{,}}{dt}\int_0^s\frac{ds}{\omega} - \frac{\pi u_{,}^2}{2g}\left(\frac{\Omega_{,}^2}{\omega^2} - \frac{\Omega_{,}^2}{\Omega_0^2}\right) (4).$$

L'intégrale $\int_0^s\frac{ds}{\omega}$ étant prise, comme il est indiqué,

depuis le niveau de la section supérieure jusqu'à la section à laquelle se rapportent $p$, $s$, $z$ et $\omega$.

L'équation (4) exprime la relation qui a lieu au bout du temps $t$, entre la vitesse à la section d'aval, la hauteur $z_0$ du niveau du liquide, la distance $s_0$ du point fixe pris sur l'axe au niveau primitif du liquide, et la pression éprouvée par la section correspondante aux variables $z$ et $s$ liées entre elles par l'équation de la courbe de l'axe.

Si la valeur de $p$ était nulle ou négative, il faudrait en conclure que les tranches du liquide tendent à se séparer les unes des autres, ou du moins que le liquide tend à s'écarter des parois du vase, lit ou canal dans lequel il se meut.

48. La valeur de $p$ qui résulte de l'équation (4) convient à tous les points du liquide et des parois du lit dans lequel il coule; or la pression qui a lieu à la section inférieure est donnée, elle est égale à la pression atmosphérique si le liquide s'écoule dans l'air, elle est nulle, s'il s'écoule dans le vide; nous l'avons en général représenté par $P_{,}$; de plus, pour cette section inférieure $\omega = \Omega_{,}$, $z$ est égal à $z_{,}$ et l'intégrale $\int \frac{ds}{\omega}$ devra être prise depuis le niveau du liquide jusqu'à la section d'aval, ou depuis la section d'aval jusqu'au niveau du liquide, ce que l'on exprime ainsi $\int_0^l \frac{ds}{\omega}$, l'équation (4) devient alors

$$P_{,} = P_0 + \pi H - \frac{\pi}{g}\Omega_{,}\frac{du_{,}}{dt}\int_0^l \frac{ds}{\omega} - \frac{\pi u_{,}^2 \Omega_{,}^2}{2g}\left(\frac{1}{\Omega_{,}^2} - \frac{1}{\Omega_0^2}\right) \ldots (5).$$

de l'intégrale $\int \frac{ds}{\omega}$. L'orifice étant très-petit, on peut encore négliger le terme $\frac{1}{\Omega_0^2}$ devant le terme $\frac{1}{\Omega_1^2}$. Si de plus $P_0 = P_1$, il reste $\frac{u_1^2}{2g} = H$ ou $u_1 = \sqrt{2gH}$, H étant la hauteur du niveau au-dessus du centre de l'orifice, au moment où l'on considère le mouvement du liquide.

Si, dans un temps très-court, la hauteur peut être considérée comme constante, il en doit être de même de la vitesse, puisque, dans le cas particulier que nous traitons, $u_1 = \sqrt{2gH}$; le terme affecté de $\frac{du}{dt}$ doit donc disparaître de l'expression de la pression qui se réduit à $p = P_0 + \pi H$, c'est-à-dire que cette pression est la même que si le liquide était stagnant.

Pour déterminer la hauteur de l'abaissement du niveau du liquide en fonction du temps, reprenons l'équation (6) qui est $\Omega_0 \frac{dH}{dt} + u_1\Omega_1 = o$, dans laquelle la vitesse du liquide à la surface est $-\frac{dH}{dt}$, et l'aire de la section transversale du vase à cette hauteur est $\Omega_0$. Si nous supposons que le vase soit prismatique, $\Omega$ sera constant, et si nous mettons $\sqrt{2gH}$ à la place de $u_1$, nous aurons

$$\Omega_0 \frac{dH}{dt} = -\Omega_1 \sqrt{2gH} \text{ ou } \frac{dH}{\sqrt{H}} = -\frac{\Omega_1 \sqrt{2g}}{\Omega_0} dt,$$

et en intégrant $2\sqrt{H} = c - \frac{\Omega_1 t}{\Omega_0}\sqrt{2g}$, à l'origine de

l'écoulement on a $t = o$, $H = H_o$ d'où $c = 2\sqrt{H_o}$ et $\sqrt{H_o} - \sqrt{H} = \frac{\Omega_{,} t}{2\Omega_o}\sqrt{2g}$; équation qui fait connaître la hauteur du niveau H en fonction du temps.

Si l'on veut déterminer le temps que le liquide mettra à s'écouler, il faut faire $H = o$, alors on obtiendra $T = \frac{2\Omega_o\sqrt{H_o}}{\Omega_{,}\sqrt{2g}} = \frac{2\Omega_o H_o}{\Omega_{,}\sqrt{2gH_o}}$; c'est le temps que le vase mettra à se vider entièrement.

51. Si l'on devait avoir égard à la résistance due au frottement contre les parois du vase, lit ou canal, il faudrait comprendre cette force au nombre de celles qui agissent sur le système. Admettons donc que l'on puisse représenter par $f$ l'intensité de cette force sur l'unité de la masse, $f$ étant fonction de la vitesse, du temps et de la forme du lit ou canal : comme cette résistance agit en sens contraire du mouvement, son action sur la tranche $\omega ds$ sera exprimée par $-\frac{\pi}{g} f\omega ds$ et l'équation (1) deviendra

$$dp = \frac{\pi}{g}\left(gdz - fds - \frac{du}{dt}ds\right);$$

l'équation (2) sera

$$dp = \pi dz - \frac{\pi}{g} u \frac{du}{ds} ds - \frac{\pi}{g}\frac{du}{dt} ds - \frac{\pi}{g} fds;$$

on obtiendra encore pour l'équation (3)

$$dp = \pi dz - \frac{\pi}{g}\Omega_{,}^2 u_{,}^2 \frac{d\omega}{\omega^3} - \frac{\pi}{g}\frac{du_{,}}{dt}\frac{\Omega_{,} ds}{\omega} - \frac{\pi}{g} fds.$$

L'intégration donnera ensuite

$$p = \pi z - \frac{\pi\Omega_{,}^2}{\omega^2} \times \frac{u_{,}^2}{2g} - \frac{\pi}{g}\Omega_{,}\frac{du}{dt}\int\frac{ds}{\omega} - \frac{\pi}{g}\int fds + c;$$

puis en déterminant la constante de manière qu'à la section supérieure $\omega = \Omega_0$, $z = z_0$, que la pression soit $P_0$ et que les intégrales $\int \frac{ds}{\omega}$ et $\int f ds$ s'évanouissent, l'équation (4) deviendra

$$p = P_0 + \pi(z - z_0) - \frac{\pi u_1^2}{2g}\left(\frac{\Omega_1^2}{\omega^2} - \frac{\Omega_1^2}{\Omega_0^2}\right) - \frac{\pi}{g}\Omega_1 \frac{du_1}{dt}\int_0^s \frac{ds}{\omega} - \frac{\pi}{g}\int_0^s f ds;$$

équation dans laquelle $f$ est une certaine fonction de $t$, de $s$, de $u$ et de $\omega$. $z - z_0$ est la hauteur du niveau de l'eau au-dessus du centre de gravité de la section $\omega$. Si $P_1$ est la pression qui a lieu à la section inférieure $\Omega_1$, comme nous avons représenté $z - z_0$ par H, nous aurons :

$$P_1 = P_0 + \pi H - \frac{\pi u_1^2 \Omega_1^2}{2g}\left(\frac{1}{\Omega_1^2} - \frac{1}{\Omega_0^2}\right) - \frac{\pi}{g}\Omega_1 \frac{du_1}{dt}\int_0^l \frac{ds}{\omega} - \frac{\pi}{g}\int_0^l f ds \ldots (8);$$

équation qui ne sera intégrable sous forme finie que dans un petit nombre de cas choisis exprès ; en général, l'intégrale ne pourra s'obtenir que sous forme de série, et les valeurs de $u_1$ et de $t$ qui en dépendent ne pourront s'obtenir que par approximation.

Dans le cas particulier où le lit du canal ou tuyau a une section constante, et où la vitesse est indépendante du temps, on a en même temps $\Omega_0 = \Omega_1 = \omega$ et $\frac{du}{dt} = o$, ce qui réduit l'équation (8) à

$$P_1 = P_0 + \pi H - \frac{\pi}{g}\int f ds,$$

équation qui est indépendante du débit, et qui fait reconnaître que si les pressions extrêmes ainsi que la pente absolue restent invariables, le terme de la

résistance $\int f ds$ restera constant. Si donc on fait couler par différents tuyaux ayant les mêmes sections extrêmes et les mêmes charges aux extrémités, la hauteur perdue en résistance sera constante, quel que soit le diamètre ou la section de ces tuyaux. Cette observation trouvera son application lorsque l'on s'occupera du mouvement de l'eau dans les tuyaux de conduite.

Il n'a pas été question, dans ce qui précède, de la force centrifuge, parce que cette force étant dirigée normalement à la courbe de l'axe du vase, lit ou canal, est détruite par la résistance des parois; elle ne peut donc exercer aucune influence sur le mouvement si l'on néglige les frottements; mais si l'on doit avoir égard aux frottements, comme la force centrifuge tend à augmenter la pression du liquide contre les parois concaves, il peut être nécessaire de prendre cette force en considération, et d'introduire dans l'équation générale un terme de la forme de $\frac{\pi}{g}\int\frac{u^2}{r}y ds$, $r$ étant le rayon de courbure et $y$ la distance d'un point quelconque de la section à la paroi.

### IV. Théorie du mouvement permanent d'une masse liquide continue.

52. Considérons actuellement une masse continue d'un liquide incompressible homogène qui coule d'un mouvement permanent dans un vase, lit ou canal quelconque.

Conservons d'abord les mêmes notations que dans l'article précédent, et rappelons-nous (37) que, tant que dure la permanence du mouvement, la vitesse commune des différents points de chaque section ou leur vitesse moyenne reste la même, et est constamment en raison inverse de l'aire de la section que l'on considère; enfin que le produit de l'aire de chaque section, par la vitesse commune ou moyenne, forme à toute époque du mouvement, un produit constant et égal au volume d'eau qui alimente le courant.

Si Q est le volume d'eau constant dont nous venons de parler, l'expression analytique de la propriété fondamentale du courant permanent sera

$$u\omega = u'\omega' = u''\omega'' = \text{etc.}, = Q.$$

52. Il est facile de déduire les équations générales du mouvement permanent de celles du mouvement varié trouvées dans l'article précédent; il suffit pour cela d'admettre que la vitesse $u_{,}$ de la section inférieure est constante, ce qui donne $\frac{du_{,}}{dt} = o$, et de remarquer que si l'on appelle $u_0$ la vitesse de la section supérieure $\Omega_0$, le principe fondamental donnera

$$u\omega = u_0\Omega_0 = \Omega_{,}u_{,} = Q, \text{ et par suite } u = \frac{\Omega_{,}u_{,}}{\omega},\ u_0 = \frac{\Omega_{,}u_{,}}{\Omega_0}.$$

Ces divers résultats introduits dans les équations du mouvement varié les changeront en équations du mouvement permanent. Ainsi l'expression générale

de la pression du n° 47 deviendra pour le mouvement permanent $p = P_0 + \pi z - \pi \left(\frac{u - u_0^2}{2g}\right)$.

L'équation (5) du n° 48, qui donne la loi du mouvement entre les sections extrêmes $\Omega_0$ et $\Omega_1$, se réduira à

$$P_0 - P_1 + \pi H = \frac{\pi (u_1^2 - u_0^2)}{2g}$$

$$\text{ou } \frac{u_1 - u_0^2}{2g} = H + \frac{P_0 - P_1}{\pi}.$$

L'équation (7) du n° 48 donne $dt = \frac{\Omega_1 ds}{Q}$, ou $t = \frac{\Omega_1 s}{Q}$ pour le temps que le liquide met à parcourir la distance $s$ qui sépare les sections $\Omega_1$ et $\omega$.

L'équation (8) du n° 51, qui donne la loi du mouvement lorsqu'on veut avoir égard à la résistance due au frottement contre les parois, se réduit à

$$\frac{P_0 - P_1}{\pi} + H - \frac{1}{g}\int f ds = \frac{u_1^2 - u_0^2}{2g}.$$

54. On peut parvenir directement à l'équation que nous venons de trouver par une simple application du principe des forces vives au mouvement permanent; en effet, dans cette circonstance, la vitesse étant indépendante du temps, et ne variant qu'avec le lieu occupé par le point ou la section que l'on considère, le mouvement du système ne dépend plus que de la pesanteur, des liaisons géométriques et de la résistance due au frottement, le principe des forces vives lui est alors immédiatement applicable. Pour faire cette application, nous supposerons d'abord

que la masse liquide et continue que nous considérons soit seulement soumise à l'action de la pesanteur et de certaines pressions; nous ferons donc abstraction, pour le moment, de la résistance due au frottement contre les parois, de l'adhérence des molécules contre ces parois et de la viscosité du liquide; nous admettrons enfin que tous les points de chacune des sections extrêmes soient animés d'une vitesse commune. Conservons les mêmes notations que ci-dessus, appelons de plus $M = \frac{\pi Q}{g}$ la masse constante du liquide qui, dans chaque seconde, alimente le courant.

$P_0$ étant la pression moyenne par unité de surface que supporte la première section du côté d'amont;

$P_0\Omega_0$ sera la pression totale qui agit sur cette section;

$P_{,}'\Omega_{,}$ sera de même la pression totale que supporte la section d'aval, pression qui agit en sens contraire de la précédente, et qui, par conséquent, doit être affectée du signe $-$.

Soient encore $\delta s_0$ et $\delta s_{,}$, les vitesses virtuelles des centres de gravité des sections extrêmes lorsque le système prend un mouvement très-petit.

55. Avant d'aller plus loin nous ferons observer que si les sections extrêmes sont perpendiculaires à la direction de l'axe du courant ou de la ligne qui passe par le centre de toutes les sections, comme cela a lieu lorsqu'il s'agit du mouvement de l'eau dans

les canaux fermés, alors les chemins $\partial s_0$ et $\partial s_{,}$ sont les petites portions des courbes décrites par les centres des sections extrêmes; si au contraire, les sections sont faites par des plans verticaux, comme cela a lieu dans les fleuves et rivières, les petits chemins que nous désignerons par $\partial l_0$ et $\partial l_{,}$ seront les projections horizontales des chemins réellement décrits par les centres des sections extrêmes. Si $\omega$ représente l'aire de la section perpendiculaire à l'axe du courant, que $\omega_{,}$ soit l'aire de la section verticale passant par le même centre, et $i$ l'angle que la tangente à la courbe passant par le centre des sections fait avec l'horizontale, on aura, eu égard à la petitesse des quantités $\partial s$ et $\partial l$, et à celle de l'angle $i$, $\partial l = \partial s \cos i$, et $\omega = \omega_{,} \cos i$, d'où $\omega_{,} \partial l = \omega \partial s$. Nous pourrons donc, lorsque nous le jugerons convenable, prendre l'une de ces quantités pour l'autre. Pour le moment, nous conserverons $\omega \partial s$ dans la théorie qui nous occupe.

56. La gravité et les pressions, lorsque l'on néglige la résistance due au frottement, étant les seules forces qui agissent sur le système, il résulte de l'application du principe des forces vives que la moitié de la variation de la force vive entre les sections extrêmes, pendant un temps quelconque, est égale à la somme des quantités d'action imprimées pendant le même temps, par la gravité et les pressions.

La vitesse étant d'abord supposée commune à tous les points de chacune des sections extrêmes, il en résulte que la moitié de la variation de la force vive

les sections extrêmes, qui a lieu pendant l'unité de temps, est égale à $\frac{M}{2}(u_{,}^2 - u_0^2)$.

La quantité d'action imprimée, dans l'unité de temps, pour la pression qui agit sur la section d'amont est égale à $P_0\Omega_0 u_0$.

La pression d'aval agissant en sens contraire de la précédente, développe, dans le même temps, une quantité d'action égale à $-P_{,}\Omega_{,}u_{,}$.

La quantité d'action due aux pressions est donc égale à $$(P_0 - P_{,})Q = \left(\frac{P_0 - P_{,}}{\pi}\right)Mg,$$

puisque $$\Omega_{,}u_{,} = \Omega_0 u_0 = Q = \frac{Mg}{\pi}.$$

La quantité d'action imprimée par la pesanteur à la masse comprise entre les sections extrêmes, pendant l'unité de temps, ou pendant le passage de la masse M par ces sections, est égale à $MgH$ (voir le n° 30).

L'application du principe des forces vives au système que nous considérons donne donc

$$M\left(\frac{u_{,}^2 - u_0^2}{2}\right) = Mg\left(H + \frac{P_0 - P_{,}}{\pi}\right),$$

ou simplement

$$\frac{u_{,}^2 - u_0^2}{2g} = H_{,} + \frac{P_0 - P_{,}}{\pi} \ldots\ (1);$$

équation identique avec celle que nous avons déduite (53) de l'équation générale du mouvement varié.

L'équation (1) dont on fait un fréquent usage dans l'hydraulique, a été donnée la première fois par Daniel

Bernouillis, elle suppose que tous les point; d'une même section sont animés d'une vitesse commune, et que le liquide coule sans éprouver de résistance, ou, du moins, que l'effet du frottement peut être négligé, ce qui ne doit avoir lieu que quand les sections extrêmes de la masse que l'on considère sont très-rapprochées.

57. Nous allons déduire de l'équation (1) plusieurs conséquences intéressantes;

Remarquons d'abord que $\frac{P_0}{\pi}$ et $\frac{P_1}{\pi}$ sont les hauteurs de deux colonnes de liquide qui, dans l'état statique (42), exerceraient, par leur poids, sur l'unité de surface de leur base les pressions $P_0$ et $P_1$. L'équation (1) signifie donc que *la différence des hauteurs dues aux vitesses des sections extrêmes, est égale à la différence de niveau des centres de gravité de ces sections, de laquelle il faut retrancher la différence des hauteurs dues aux pressions qu'elles supportent.* Elle signifie encore, que lorsqu'une masse liquide est simplement soumise à l'action de la gravité et de certaines pressions, si l'on considère cette masse dans deux positions successives, mais telles que la continuité n'ait pas cessé d'exister, lors du passage de l'une de ces positions à l'autre, la quantité d'action qu'elle possède dans la seconde position est égale à la quantité d'action qu'elle possédait au passage de la première, plus ou moins la quantité d'action imprimée par la gravité et due à la hauteur dont son centre de gravité s'est élevé

ou abaissé en passant d'une position à l'autre, plus ou moins la quantité d'action imprimée ou absorbée par les pressions.

Elle apprend, enfin, que dans le mouvement permanent d'un liquide, les variations de pressions peuvent se transformer en augmentation ou diminution du carré de la vitesse.

Si les pressions par unité de surface supportées par les sections extrêmes sont égales, on a $P_0 = P_1$ et par suite $\frac{u_1^2 - u_0^2}{2g} = H$, c'est-à-dire que la variation de la vitesse est uniquement due à l'action de la gravité.

58. Si la vitesse de la section d'amont peut être considérée comme nulle, par rapport à celle de la section d'aval, comme cela a lieu lorsque l'eau d'un réservoir entretenu constamment plein, sort par un orifice dont l'aire est très-petite par rapport à l'étendue de ce réservoir, on a alors $u_0^2 = 0$; et par suite $u_1^2 = 2gH$, ainsi que nous l'avons déjà obtenu de l'équation du mouvement varié (50). Par conséquent le mouvement d'une veine fluide dont tous les points de la section que l'on considère sont animés d'une vitesse commune, suit la loi du mouvement de la chute des corps graves.

59. Lorsque le liquide se meut dans un lit découvert, les sections extrêmes ayant alors un niveau déterminé, on peut donner à l'équation (1) une forme plus commode pour les applications ; en effet soit H la différence de niveau des sections extrêmes, $H_1$ celle

des centres de gravité de ces sections, $z_0$ la distance du centre de gravité de la section d'amont au niveau de cette section, $z_{,}$ la distance analogue pour la section d'aval, on aura $H_{,} = H + z_{,} - z_0$; car les deux verticales passant par les sections extrêmes, et les deux horizontales passant l'une par le niveau de la section d'amont, l'autre par le centre de la section d'aval, forment un rectangle dans lequel le côté vertical d'amont est $H_{,} + z_0$, tandis que le côté vertical d'aval est $H + z_{,}$, on a donc $H_{,} + z_0 = H + z_{,}$.

Dans le cas le plus général, les pression exercées sur les sections extrêmes peuvent se composer chacune de la pression due au poids du liquide et d'une pression extérieure quelconque.

Pour la section d'amont, la pression due au poids sera $\pi z_0$, et si l'on désigne la pression extérieure par $p_0$ on aura $P_0 = p_0 + \pi z_0$.

On aura de même pour la pression exercée sur la section d'aval $P_{,} = p_{,} + \pi z_{,}$. Par conséquent

$$H_{,} + \frac{P_0 - P_{,}}{\pi} = H + z_{,} - z_0 + \frac{p_0 - p_{,}}{\pi} - z_{,} + z_0 = H + \frac{p_0 - p_{,}}{\pi}.$$

L'équation (2) du n° 56 subsiste donc, soit que l'on regarde H comme la différence de niveau entre les sections extrêmes, soit comme la différence de niveau entre les centres de gravité de ces sections; mais dans le premier cas $p_0 - p_{,}$ est la différence entre les pressions extérieures supportées par les sections extrêmes, tandis que dans le second, il est égal à la différence entre les pressions totales des mêmes sec-

tions. Suivant les circonstances nous pourrons donc, préférer l'une de ces formes à l'autre.

60. Si le liquide sort, par un orifice vertical et en filets sensiblement parallèles, d'un vase maintenu au même niveau et ouvert à sa partie supérieure, le résultat précédent se trouve un peu modifié ; en effet, à la sortie de l'orifice, le liquide supporte la pression atmosphérique et n'en éprouve pas d'autre; car l'expérience prouve que quand l'orifice est circulaire, les filets qui sont alors sensiblement parallèles forment un jet parabolique; par conséquent chaque molécule décrit la courbe qu'elle décrirait si elle était isolée, en vertu de sa vitesse et de la gravité; les pressions latérales se détruisent deux à deux et sont toutes égales à la pression extérieure. La section supérieure étant horizontale, on a $z_0 = 0$, et si l'on désigne par $p$ la pression atmosphérique, on aura $P_0 = P_1 = p$, et par suite $H_1 = H + z_1$, puis $\frac{u_1^2}{2g} = H + z_1$, c'est-à-dire que la vitesse à la sortie de l'orifice est due à la hauteur du liquide sur le centre de cet orifice.

Si le liquide passe d'un vase maintenu à un niveau $H_1$, sur le sommet de l'orifice, dans un autre vase maintenu à un niveau $H_2$ au-dessus du même sommet, la pression sur la section supérieure sera encore égale à la pression atmosphérique $p$. Quant à la pression $P_1$ sur la section d'aval, elle sera égale à la pression atmosphérique augmentée du poids de la colonne de liquide qui, du côté d'aval, presse sur le

centre de l'orifice, colonne dont la hauteur est égale à $z_{,} + H_2$, on aura donc $P_0 = p$, $P_{,} = p + \pi (z_{,} + H_2)$, et par suite $H = H_1 - H_2$, puis $\frac{u_{,}^2}{2g} = H_1 - H_2$. C'est-à-dire que la vitesse au passage de l'orifice est due à une hauteur égale à la différence de niveau des deux vases.

Lorsque l'on a $H_2 = o$, il vient $H = H_1$ et $u_{,}^2 = 2gH$, c'est-à-dire que quand le niveau du vase inférieur ne s'élève que jusqu'au sommet de l'orifice, la vitesse au passage de cet orifice est due à la hauteur de l'eau d'amont sur son sommet.

Si le niveau du liquide dans le second vase n'atteint pas le sommet de l'orifice, alors $H_2$ est négatif, $P_{,} = p + (z_{,} - H_2) \pi$, il vient donc $H = H_1 + H_2$ et $u_{,}^2 = 2g (H_1 - H_2)$, c'est-à-dire que la vitesse est encore due à la différence de niveau des deux vases. La hauteur de la colonne qui, du côté d'aval, presse sur le centre de l'orifice est égale à $z_{,} - H_2$, elle devient nulle lorsque $H_2 = z_{,}$, c'est-à-dire que lorsque le niveau du liquide, dans le second vase, ne dépasse pas le centre de l'orifice, la pression d'aval est alors égale à la pression atmosphérique.

Des deux résultats que nous venons de faire connaître, celui relatif à la vitesse est le plus important, il est aussi d'une exactitude parfaite, lorsque l'on prend $\sqrt{2g (H_1 + H_2)}$ pour la vitesse dans la section oblique que l'on obtient en faisant passer un plan par la base de l'orifice ou par son point le plus bas,

et par le point de rencontre de la veine avec la ligne d'eau du vase ou bassin inférieur. Ce plan doit être perpendiculaire au plan vertical passant par l'axe, qui, lui-même, est perpendiculaire au plan de l'orifice.

Quant à la pression du liquide d'aval contre l'orifice, elle ne saurait être nulle quand le centre de l'orifice se trouve au niveau du bassin inférieur; le résultat qui se rapporte à cette pression n'est donc pas exact; cela provient de ce que l'on a substitué à la pression dynamique, que l'on ne connaît pas, la pression hydrostatique qui en diffère peu quand le liquide se meut avec lenteur; mais cette substitution cesse de pouvoir être faite quand l'eau sort par un petit orifice avec une grande vitesse.

61. Lorsque la pression atmosphérique est la seule qui agisse sur les sections extrêmes, on a $p_0 = p_1$, et par suite, $H_1 = \frac{u_1^2 - u_0^2}{2g}$, c'est-à-dire que, pour une masse liquide qui se meut sans frottement dans un vase, lit ou canal quelconque, mais dont les sections extrêmes sont à découvert, la variation de la vitesse est uniquement due à la différence de niveau de ces sections, ou *à la pente absolue de la surface du liquide.*

Si la différence de niveau des sections extrêmes était nulle, on aurait $H_1 = 0$, et par suite $u_1 = u_0$, c'est-à-dire que le liquide prendrait un mouvement uniforme en conservant la vitesse acquise $u_0$.

62. Lorsque la vitesse cesse d'être commune aux

différents points de chaque section, plusieurs savants hydrauliciens, tels que MM. Poncelet et Coriolis, pensent que l'équation du mouvement permanent doit éprouver une certaine modification. Pour connaître si cette opinion est fondée, reprenons cette équation qui est $MgH + Mg\left(\frac{P_0 - P_1}{\pi}\right) = M\left(\frac{u_1^2 - u_0^2}{2}\right)$, et remarquons qu'elle se compose de trois termes; considérons le premier, celui qui est relatif à la quantité d'action imprimée par la pesanteur. Lorsque la vitesse cessera d'être commune aux différents points de chaque section, ce terme sera encore $MgH$, comme cela résulte de ce que nous avons vu dans le n° 30; cependant H étant la différence de niveau entre le centre de gravité de la masse M à son passage par les sections extrêmes, il convient de remarquer que, lorsque la vitesse était commune, le centre de gravité se confondait avec le centre de figure des sections; or, cela n'aura plus lieu si la vitesse est variable, car ces centres seront relevés si la vitesse va en augmentant du fond à la surface; ils seront, au contraire, abaissés si la vitesse augmente de la surface vers le fond; mais comme la différence de niveau entre deux points semblablement situés dans les sections extrêmes, doit être sensiblement égale à la différence de niveau entre les centres de ces sections, on peut considérer le terme relatif à la quantité d'action imprimée par la pesanteur comme ne devant éprouver aucun changement. Il est d'ailleurs

et par le p [illegible] mauvais
d'eau du [illegible] on négligera, de la ma-
perpend [illegible] $z_0$ étant la hauteur au-dessous du niveau
qui, lu [illegible] du centre de la section $\omega_0$, $z_1$ étant la hauteur
fice. [illegible] pour la section $\omega_1$, et $H_1$ étant la différence
Qu [illegible] de ces deux sections ; lorsque la vitesse
fice, [illegible] commune, on aura $H = H_1 + z_1 - z_0$ ; lorsque
l'or [illegible] la vitesse sera variable, les hauteurs $z_0$ et $z_1$ croîtront
rés [illegible] ou diminueront de quantités très-petites que nous
p [illegible] représenterons par $\frac{z'}{n}$ et $\frac{z_0}{n}$, l'expression de H devien-
l [illegible]

dra donc $H_1 + (z_1 - z_0)\left(1 + \frac{1}{n}\right)$, la quantité $z_1 - z_0$ étant, en général, fort petite, ainsi que la quantité $\frac{1}{n}$, le produit de ces deux quantités pourra être négligé, sans qu'il puisse en résulter d'erreur sensible, alors il restera comme ci-dessus $H_0 = H_1 + z_1 - z_0$.

C'est ainsi que dans l'hydraulique, on peut négliger, sans altérer les résultats, des différences insignifiantes qui compliqueraient inutilement les formules, et par suite les calculs auxquels leur application donne lieu.

Le second terme $Mg\left(\frac{P_0 - P_1}{\pi}\right)$, celui relatif à la quantité d'action imprimée par les pressions, n'éprouvera non plus aucune modification, si l'on admet, comme nous l'avons déjà fait (43), que la pression, par unité de surface, soit constante dans chaque section; en effet, $P_0$ étant la pression, par unité de surface, qui agit sur la section d'amont, $d\omega_0$ un élément de cette

section dont la vitesse soit $v_0$, la quantité d'action développée, dans l'unité de temps, par la pression qui agit sur cet élément sera exprimée par $P_0 d\omega_0 v_0$; et la quantité d'action développée par la pression qui agit sur toute la section d'amont sera égale à $P_0 \int v_0 d\omega_0$; mais le mouvement étant permanent, si $u_0$ est la vitesse moyenne qui correspond à la section $\omega_0$, on aura $\int v_0 d\omega_0 = \omega_0 u_0 = Q = \frac{Mg}{\pi}$; par conséquent, la différence entre la quantité d'action développée par les pressions qui agissent sur les sections extrêmes, sera encore égale à $Mg\left(\frac{P_0 - P_1}{\pi}\right)$, et lorsqu'on aura égard à la variation des pressions due au poids du liquide, elle deviendra $Mg\left(\frac{p_0 - p_1}{\pi} + z_0 - z_1\right)$.

D'ailleurs, lorsque la vitesse varie d'un point à un autre d'une section, la cause qui modifie cette vitesse doit modifier la pression dans le même sens; car la vitesse est une conséquence de la pression, due à la différence des pressions sur le point dont on s'occupe.

63. Considérons actuellement le troisième terme, celui qui est relatif à la variation de la force vive, et cherchons ce qu'il devient lorsque la vitesse varie en passant d'un point à un autre d'une même section.

Lorsque la vitesse est variable, elle peut varier en grandeur ou en direction, et même en grandeur

facile d'apprécier la différence qu'on néglige, de la manière suivante: $z_0$ étant la hauteur au-dessous du niveau de l'eau, du centre de la section $\omega_0$, $z_1$ étant la hauteur analogue pour la section $\omega_1$, et $H_1$ étant la différence de niveau de ces deux sections; lorsque la vitesse sera commune, on aura $H = H_1 + z_1 - z_0$; lorsque la vitesse sera variable, les hauteurs $z_0$ et $z_1$ croîtront ou diminueront de quantités très-petites que nous représenterons par $\frac{z'}{n}$ et $\frac{z_0}{n}$, l'expression de H deviendra donc $H_1 + (z_1 - z_0)\left(1 + \frac{1}{n}\right)$, la quantité $z_1 - z_0$ étant, en général, fort petite, ainsi que la quantité $\frac{1}{n}$, le produit de ces deux quantités pourra être négligé, sans qu'il puisse en résulter d'erreur sensible, alors il restera comme ci-dessus $H_0 = H_1 + z_1 - z_0$.

C'est ainsi que dans l'hydraulique, on peut négliger, sans altérer les résultats, des différences insignifiantes qui compliqueraient inutilement les formules, et par suite les calculs auxquels leur application donne lieu.

Le second terme $Mg\left(\frac{P_0 - P_1}{\pi}\right)$, celui relatif à la quantité d'action imprimée par les pressions, n'éprouvera non plus aucune modification, si l'on admet, comme nous l'avons déjà fait (43), que la pression, par unité de surface, soit constante dans chaque section; en effet, $P_0$ étant la pression, par unité de surface, qui agit sur la section d'amont, $d\omega_0$ un élément de cette

section dont la vitesse soit $v_0$, la quantité d'action développée, dans l'unité de temps, par la pression qui agit sur cet élément sera exprimée par $P_0 d\omega_0 v_0$; et la quantité d'action développée par la pression qui agit sur toute la section d'amont sera égale à $P_0 \int v_0 d\omega_0$; mais le mouvement étant permanent, si $u_0$ est la vitesse moyenne qui correspond à la section $\omega_0$, on aura $\int v_0 d\omega_0 = \omega_0 u_0 = Q = \frac{Mg}{\pi}$; par conséquent, la différence entre la quantité d'action développée par les pressions qui agissent sur les sections extrêmes, sera encore égale à $Mg\left(\frac{P_0 - P_1}{\pi}\right)$, et lorsqu'on aura égard à la variation des pressions due au poids du liquide, elle deviendra $Mg\left(\frac{p_0 - p_1}{\pi} + z_0 - z_1\right)$.

D'ailleurs, lorsque la vitesse varie d'un point à un autre d'une section, la cause qui modifie cette vitesse doit modifier la pression dans le même sens; car la vitesse est une conséquence de la pression, due à la différence des pressions sur le point dont on s'occupe.

63. Considérons actuellement le troisième terme, celui qui est relatif à la variation de la force vive, et cherchons ce qu'il devient lorsque la vitesse varie en passant d'un point à un autre d'une même section.

Lorsque la vitesse est variable, elle peut varier en grandeur ou en direction, et même en grandeur

et en direction; nous aurons donc trois circonstances à examiner :

1° Les filets fluides peuvent avoir des directions parallèles et une vitesse égale;

2° Ces filets peuvent avoir des directions parallèles, mais être animés de vitesses différentes;

3° Ils peuvent avoir des vitesses égales, mais leur direction peut être convergente ou divergente.

Lorsque les différents points d'une masse liquide M sont animés de vitesses parallèles et égales à $u$, la quantité de mouvement que possède ce liquide est exprimée par $Mu$, et sa force vive par $Mu^2$.

Lorsque la vitesse est variable, la quantité de mouvement a pour expression $\int v dm$, et la force vive $\int v^2 dm$; pour reconnaître si ces expressions diffèrent sensiblement des premières, nous remarquerons que M étant la masse constante que débite le courant dans l'unité de temps, $\omega$ l'aire de la section que l'on considère, si $u$ est la vitesse supposée d'abord commune à tous les points de la section, on a $M = \frac{\pi\omega u}{g}$, alors la quantité de mouvement que possède la masse M est $Mu = \frac{\pi\omega u^2}{g}$, et sa force vive $Mu^2 = \frac{\pi\omega u^3}{g}$; lorsque la vitesse est variable aux différents points d'une même section, la masse que débite le courant dans chaque unité de temps est bien encore $M = \frac{\pi\omega u}{g}$; mais $u$ étant la vitesse moyenne qui correspond à la section $\omega$, on

doit pressentir que la quantité de mouvement peut différer de $\frac{\pi}{g}\omega u^2$, et la force vive de $\frac{\pi}{g}\omega u^3$; pour prouver que ces quantités diffèrent effectivement, désignons par $d\omega$ les éléments de la section et par $v$ la vitesse variable qui correspond à chacun de ces éléments, la vitesse moyenne sera exprimée par $u = \frac{\int v d\omega}{\omega}$, la masse M par $\frac{\pi}{g}\int v d\omega$ et sera encore égale à $\frac{\pi}{g}\omega u$; quant à la quantité de mouvement, elle sera exprimée par $\frac{\pi}{g}\int v^2 d\omega$ et la force vive par $\frac{\pi}{g}\int v^3 d\omega$; par conséquent, pour obtenir la quantité de mouvement et la force vive d'une certaine masse liquide, dont tous les points sont animés de vitesses différentes, il faudrait pouvoir trouver, en toute circonstance, la valeur des intégrales $\int v^2 d\omega$ et $\int v^3 d\omega$, ce qui est impossible dans l'état actuel de nos connaissances.

M. Poncelet, qui a fixé son attention sur ce sujet, a fait voir, dans un mémoire publié en 1829, que $\int v^2 d\omega$ et $\int v^3 d\omega$ étaient des quantités toujours un peu plus grandes que $\omega u^2$ et $\omega u^3$; nous allons, par une méthode peu différente, parvenir à la même conséquence.

64. La définition de la vitesse moyenne donne d'abord $u\omega = \int v d\omega = \int u d\omega$, et par suite on doit avoir $\int (v - u) d\omega = 0$.

Pour trouver la valeur exacte de la quantité de mouvement et reconnaître si réellement elle dif-

fère de $u^2\omega$, cherchons à apprécier la différence :

$$\int v^2 d\omega - u^2\omega = \int (v^2 - u^2) d\omega = \int (v+u)(v-u) d\omega,$$

et remarquons que $v+u$ peut être remplacé par $2u+(v-u)$, ce qui donne $\int (v^2-u^2)d\omega = \int (v-u)^2 d\omega$, car d'après ce que nous venons de voir le terme $2u\int (v-u)d\omega$ est nécessairement nul. La quantité $\int (v-u)^2 d\omega$ étant essentiellement positive, il en résulte que $\int v^2 d\omega$ sera toujours plus grand que $u^2\omega$ et que lorsqu'on croit pouvoir poser $\int v^2 d\omega = \alpha u^2\omega$, $\alpha$ est un coefficient toujours un peu plus grand que l'unité ; on a alors : $\int v^2 d\omega - u^2\omega = (\alpha - 1)u^2\omega = \int (v-u)^2 d\omega$ et $\alpha - 1 = \int \left(\frac{V}{u} - 1\right)^2 \frac{d\omega}{\omega}$.

Pour déterminer la valeur de $\int v^3 d\omega$, nous remarquerons que l'on a $\int (v^3 - u^3) d\omega = \int v(v^2 - u^2) d\omega$, car on peut toujours remplacer $u\omega$ par $\int v d\omega$ et $\int u^3 d\omega$ par $\int u^2 v d\omega$, or $\int v(v^2 - u^2) d\omega = \int v(v+u)(v-u) d\omega$ et à cause de $v+u = 2u + (v-u)$ on obtient

$$\int v(v^2 - u^2) d\omega = 2u \int v(v-u) d\omega + \int v(v-u)^2 d\omega ;$$

mais $\int v(v-u) d\omega = \int (v-u)^2 d\omega$, on a donc :

$$\int (v^3 - u^3) d\omega = \int (2u + v)(v-u)^2 d\omega,$$

le second nombre de cette équation, étant essentiellement positif, fait reconnaître que $\int v^3 d\omega$ sera toujours plus grand que $\omega u^3$, et que, quand on croit pouvoir écrire $\int v^3 d\omega = \alpha' u^3 \omega$, $\alpha'$ est un coefficient toujours plus grand que l'unité ; on a alors

$$\int v^3 d\omega - u^3\omega = (\alpha' - 1)u^3\omega = \int (2u + v)(v - u)^2 d\omega,$$

ce qui donne $\alpha' - 1 = \int \left(2 + \frac{v}{u}\right)\left(\frac{v}{u} - 1\right)^2 \frac{d\omega}{\omega}$.

Il existe entre les coefficients $\alpha$ et $\alpha'$ une relation que nous allons faire connaître.

Si dans l'équation $\int (v^3 - u^3) d\omega = \int (2u + v)(v - u)^2 d\omega$, on remplace le facteur $2u + v$ par $3u + (v - u)$ quantité identique à la précédente, on aura :

$$\int (2u + v)(v - u)^2 d\omega = 3u \int (v - u)^2 d\omega + \int (v - u)^3 d\omega,$$

comme $\int (v - u)^3 d\omega$ est une quantité toujours très-petite on se permet de la négliger, il reste alors : $\int (v^3 - u^3) d\omega = (\alpha' - 1)\omega u^3 = 3u \int (v - u)^2 d\omega$ ; mais nous avons trouvé précédemment $(\alpha - 1)\omega u^2 = \int (v - u)^2 d\omega$, on a donc nécessairement $\frac{\alpha' - 1}{\alpha - 1} = 3$, ou $\alpha' - 1 = 3(\alpha - 1)$.

MM. Vauthier et Dupuit, ingénieurs aussi distingués que savants hydrauliciens, ont cherché à apprécier l'importance du coefficient $\alpha'$, voici les principaux résultats de leurs observations.

Le premier fait observer que le coefficient dont il s'agit, varie en sens inverse de la vitesse moyenne, c'est-à-dire qu'il décroît lorsque cette vitesse augmente, ce qui rend de plus en plus faible l'importance relative de la correction à mesure que la quantité à corriger devient de plus en plus considérable ; puis, après avoir reconnu que la valeur de $\alpha'$ est de $1^m.10$ lorsque la vitesse est de $0^m.25$ et se réduit à $1^m.02$ ou à $1^m.03$ lorsque la vitesse est de $1^m.50$, cet ingé-

nieur fait remarquer que les grandeurs absolues, résultant de l'introduction du coefficient $\alpha'$ dans la formule du mouvement parmanent, sont tellement petites dans tous les cas de pratique, et si peu susceptibles d'en modifier sensiblement et utilement les résultats numériques, qu'il n'y a pas d'inconvénient, dans les applications usuelles, à n'avoir aucun égard à ce coefficient, c'est-à-dire à le considérer comme égal à l'unité; nous même avions d'abord cru voir que ce coefficient est toujours égal à l'unité.

M. Dupuit fait une remarque analogue à celle faite par Vauthier, lorsqu'il reconnaît qu'une augmentation de vitesse occasionne une diminution dans la différence des vitesses. Cet ingénieur fait d'ailleurs observer que s'il peut être commode pour le calcul, de remplacer $\int v^3 d\omega$ par $\alpha'\omega u^3$, ce système de correction est souvent inexact, et que la différence entre les forces vives dans deux sections voisines, doit être multipliée par un coefficient spécial $\alpha''$ entièrement différent de $\alpha'$ *et toujours plus petit que l'unité.*

M. Dupuit reconnaît d'ailleurs que le coefficient de correction $\alpha'$ est effectivement plus grand que l'unité, mais que ce nombre n'est pas constant et qu'il varie avec la vitesse moyenne de manière qu'on a : $\int_{u_0}^{u'} \alpha' u du = \alpha'' \int_{u_0}^{u'} u du$, $\alpha''$ étant toujours une fraction.

Après avoir fait remarquer que la différence entre deux quantités corrigées par des coefficients, est plus

petite que la différence entre ces mêmes quantités non corrigées, il en conclut que tous les calculs faits jusqu'à présent et qui reposent sur la différence de la force vive de deux sections voisines, *sont complétement erronés.*

M. Dupuit fait ensuite très-judicieusement observer que, dans l'équation $H = \int f dl + (h_{,} - h_{0})$, le terme $h_{,} - h_{0}$ a une valeur toujours limitée par les valeurs extrêmes de $h$ ou de $u$, et que, dans les questions pratiques relatives aux relèvements, son influence est souvent complétement secondaire, tandis que le terme $\int f dl$ peut atteindre une limite quelconque si les sections sont éloignées; enfin il s'exprime ainsi : « Dans les sections irrégulières que présentent les » cours d'eau, on ne connaît donc ni la valeur, ni le » signe de $\alpha''$; l'introduction de ce coefficient dans la » formule du mouvement varié, n'est alors qu'une » complication au moins inutile. »

Nous conclurons de ce qui précède, que dans les questions usuelles de pratique, il ne peut y avoir que des inconvénients à remplacer $\int v^2 d\omega$ et $\int v^3 d\omega$ par $\alpha\omega u^2$ et $\alpha'\omega u^3$, puisque les coefficients $\alpha$ et $\alpha'$ variant dans chaque circonstance, les valeurs approximatives qu'on pourrait leur donner, tendraient à fausser les résultats et à faire ainsi penser que la formule du mouvement permanent peut conduire à des solutions erronées.

Dans ce qui va suivre, nous pourrons donc considérer sans crainte d'erreur les quantités $\int v^2 d\omega$ et $\int v^3 d\omega$ comme respectivement égales à $\omega u^2$ et à $\omega u^3$, et nous

admettrons que, quand les vitesses restent parallèles, les causes qui les rendent variables ne produisent pas d'altération sensible dans les termes de l'équation générale du mouvement permanent et que cette équation est encore $MgH + Mg\left(\frac{P_0 - P_1}{\pi}\right) = M\left(\frac{u_1^2 - u_0^2}{2}\right)$.

Si l'on remplace H par sa valeur $H_1 + z_1 - z_0$ et $P_0 - P_1$ par $p_0 - p_1 + \pi(z_0 - z_1)$, l'équation précédente deviendra $Mg\left(H_1 + \frac{p_0 - p_1}{\pi}\right) = M\left(\frac{u_1^2 - u_0^2}{2}\right)$, qui se réduit à $MgH_1 = M\left(\frac{u_0^2 - u_1^2}{2}\right)$ lorsque $p_0 = p_1$.

65. Pour compléter ce qui est relatif à l'influence que les variations de la vitesse aux différents points d'une même section peuvent exercer sur la quantité de mouvement et sur la force vive que possède le liquide, considérons encore une section dont tous les points soient animés de vitesses égales entre elles, mais dont les directions, au lieu d'être parallèles, soient toutes convergentes ou toutes divergentes. Désignons par V la vitesse effective d'un filet quelconque au passage d'un élément $d\omega$ de la section, par $\alpha$ l'angle que la direction de cette vitesse fait avec la perpendiculaire au plan de la section, par $u$ la vitesse moyenne du liquide au passage de cette section, vitesse qui est telle qu'étant multipliée par l'aire $\omega$, elle donne le débit.

Nous suivrons encore ici une marche analogue à celle adoptée par M. Poncelet, dans le mémoire déjà cité, et nous décomposerons la vitesse V en deux au-

tres, l'une $V\cos\alpha = v$ perpendiculaire au plan de la section, l'autre $V\sin\alpha = w$ dans le plan même de cette section, on aura $V^2 = v^2 + w^2 = V^2\cos^2\alpha + V^2\sin^2\alpha$; le volume de liquide qui, dans l'unité de temps, s'écoule par l'élément de la section $d\omega$, sera $V\cos\alpha d\omega = vd\omega$, et l'intégrale $\int V\cos\alpha d\omega = \int vd\omega$, prise dans toute l'étendue de la section donnera le débit : on aura donc $u\omega = \int vd\omega$.

La masse de liquide qui correspond à $d\omega$ étant $\frac{\pi}{g}vd\omega$, l'expression de la quantité de mouvement que le liquide possède, dans le sens de l'axe, sera

$$\frac{\pi}{g}\int v^2 d\omega = \frac{\pi}{g}\int V^2 d\omega - \frac{\pi}{g}\int w^2 d\omega$$

puisque $V^2 = u^2 + w^2$; mais nous avons vu, dans le numéro précédent, que $\int v^2 d\omega = u^2\omega + \int (v-u)^2 d\omega$, on aura donc $u^2\omega = V^2\omega - \int w^2 d\omega - \int (v-u)^2 d\omega$; les deux intégrales $\int w^2 d\omega$ et $\int (v-u)^2 d\omega$ étant essentiellement positives, il en résulte que la quantité de mouvement effective surpasse nécessairement la quantité de mouvement due à la vitesse moyenne.

La force vive que possède réellement la masse liquide, qui correspond à l'élément $d\omega$, étant égale à $\frac{\pi}{g}vd\omega V^2$, il en résulte que la force vive totale et effective de cette masse a pour expression

$$\frac{\pi}{g}\int vV^2 d\omega = \int v^3 d\omega + \int vw^2 d\omega;$$

mais, dans le numéro précédent, nous avons vu que $\int v^3 d\omega = u^3\omega + 3u\int (v-u)^2 d\omega$, on aura donc :

$$\int vV^2 d\omega = u^3\omega + 3u\int (v-u)^2 d\omega + \int vw^2 d\omega,$$

les deux dernières intégrales étant essentiellement positives, on doit en conclure que la force vive réelle surpassera nécessairement la force vive relative à la vitesse moyenne, toutes les fois que les vitesses effectives ne seront pas toutes égales et parallèles à celle du filet central.

Remarquons actuellement que l'intérale $\frac{\pi}{g}\int w^2 d\omega$ est l'expression de la somme des quantités de mouvement que le liquide possède dans le plan de la section, et que ces quantités de mouvement ne peuvent avoir d'autre effet que celui d'augmenter ou de diminuer les pressions latérales, et, par conséquent, de contracter ou de dilater la veine du liquide qui sort par un orifice.

Ce serait peut-être ici le lieu de s'occuper du phénomène connu sous le nom de *contraction de la veine fluide*, et de chercher à en apprécier les effets; mais il nous reste tant à faire que nous préférons réserver cette appréciation pour le quatrième livre, où elle trouvera naturellement sa place, lorsque nous nous occuperons de l'écoulement de l'eau par différents orifices.

66. Supposons maintenant que le mouvement du liquide soit contrarié par certaines résistances dont nous désignerons par F la résultante variable d'une section à une autre; mais qui, dans le mouvement permanent, est nécessairement indépendante du temps, en sorte que cette résultante est seulement fonction de la vitesse et de la forme du lit du courant; cher-

chons à introduire dans l'équation des forces vives le terme relatif à la résistance.

Si $\partial s$ est le chemin parcouru par le point d'application de cette force lorsque le système prend un mouvement très-petit, $F\partial s$ sera le moment virtuel ou l'action élémentaire de la résistante F; et l'intégrale $\int F\partial s$, prise entre les limites convenables, sera la quantité d'action absorbée par la résistance; c'est par conséquent cette intégrale qu'il faut introduire avec le signe — dans l'équation des forces vives, elle deviendra alors $\frac{M(u_1^2 - u_0^2)}{2} = MgH - \int F\partial s$, et donnera $\int F\partial s = MgH - \frac{M(u_1^2 - u_0^2)}{2}$; c'est-à-dire que sur une partie quelconque d'un courant, *la quantité d'action absorbée par la résistance est toujours égale à la quantité d'action développée par la pesanteur plus ou moins la moitié de la différence entre les forces vives possédées par le liquide au passage des sections extrêmes.* Si les sections extrêmes sont égales, alors la quantité d'action absorbée par la résistance est précisément égale à la quantité d'action développée par la pesanteur.

Le théorème précédent est fort important, puisqu'il prouve que la quantité d'action absorbée par les résistances, qui agissent sur une portion quelconque de courant permanent, ne dépend que des sections extrêmes, c'est-à-dire de leur surface et de la différence de niveau de leur ligne d'eau; tant que l'aire de ces sections ne change pas, la quantité d'action

absorbée reste la même, quelles que soient les variations de forme qu'éprouvent les sections longitudinales et transversales de la partie du courant que l'on considère.

67. Lorsque la différence de niveau entre les sections extrêmes sera nulle, on aura $H = o$ et par suite $\frac{Mu_{,}^2}{2} = \frac{Mu_o^2}{2} - \int F\partial s$, pour l'expression de la force vive conservée par le liquide. Cette force vive sera nulle au point où l'on aura $\frac{Mu_o^2}{2} = \int F\partial s$, c'est-à-dire que le courant qui pénètre sans choc dans une massse de liquide dont la surface est de niveau perd la force vive dont il est animé en un point qui est tel que l'on a $\frac{Mu_o^2}{2} = \int F\partial s$.

Si la vitesse est constante le mouvement est uniforme et l'on a en chaque point, $\frac{Mu_o^2}{2} = \frac{Mu_{,}^2}{2} =$, etc. Mais la propriété fondamentale du mouvement permanent donne $\omega u = Q$, et, si la vitesse est constante, il faut bien que l'aire de la section le soit également, il reste alors $MgH = \int F\partial s$, ou $F = Mg\frac{dH}{ds}$, c'est-à-dire que le sinus de l'angle d'inclinaison de la tangente à la courbe de superficie est toujours proportionnel à la résistance.

Si, de plus, la pente de superficie est constante, le sinus $\frac{dH}{ds}$ est nécessairement constant, et la résistance

est elle-même constante; en représentant par I le sinus d'inclinaison on aura en chaque point $F = MgI$.

Si dans l'équation $\frac{M(u_,^2 - u_0^2)}{2} = MgH - \int F ds$, on croit prouvoir remplacer F par la valeur $MgI$ que la résistance acquiert quand le mouvement est uniforme, I étant alors une fonction, non connue, de la vitesse, des éléments de la section et de la nature de la résistance, cette équation deviendra

$$\frac{M(u_,^2 - u_0^2)}{2} = MgH - Mg\int I ds,$$

ou en divisant par $Mg$ et remplacant $\frac{u_,^2}{2g}$ et $\frac{u_0^2}{2g}$ par les hauteurs $h_,$ et $h_0$, dues aux vitesses $u_,$ et $u_0$, on obtiendra $h_, - h_0 = H - \int I ds$, ou $H = \int I ds + h_, - h_0$, c'est l'équation différentielle du mouvement permanent telle qu'on la donne quelquefois; mais pour parvenir à cette équation nons avons admis que l'on avait toujours $F = MgI$, tandis que cette relation ne peut subsister que lorsque le mouvement est uniforme ou lorsque l'on a $h_, = h_0$; d'ailleurs I étant égal à $\frac{dH}{ds}$, il en résulte que $I ds = dH$ et que $\int I ds = H$; on ne peut donc avoir $H = \int I ds + h_, - h_0$. Nous ne tarderons pas à faire voir que cette équation, dont nous venons de prouver l'inexactitude, est évidemment incomplète, car elle ne tient aucun compte des variations de la vitesse qui sont indépendantes de la pente absolue H et de la pente relative I. La véri-

table équation différentielle du mouvement permanent est $H = \int \frac{F}{Mg} ds + h_{,} - h_{o}$, ou $dH = \frac{F}{Mg} ds + dh$, dans laquelle $\frac{F}{Mg} = \frac{dH - dh}{ds}$. Cette équation nous apprend que toutes les fois que la résistance sera nulle, ou pourra être considérée comme telle, on aura $dH = dh$, ou $H = h - h_{o}$, relation dont nous aurons fréquemment occasion de faire usage.

Lorsque dans l'équation différentielle on aura $\frac{F}{Mg} ds = dh$, on en conclura $dH = 2dh$, c'est-à-dire que la quantité d'action imprimée par la pesanteur se partage en deux parties égales, dont l'une est absorbée par les résistances tandis que l'autre augmente la force vive que possède le liquide.

Il est facile de représenter graphiquement le terme $\int \frac{F}{Mg} ds$, pour cela soit AB (fig. 12) l'axe hydraulique de la partie d'un courant comprise entre les sections verticales CE et BF; si par le point B, niveau de la section d'aval, nous menons l'horizontale BC, la hauteur AC sera égale à H; si nous représentons ensuite la hauteur $h_{o}$ due à la vitesse dans la section d'amont, par AE et la hauteur $h_{,}$ par BG et que nous tirions l'horizontale EF, la hauteur FG sera précisément égale à $\int \frac{F}{Mg} ds$; en effet dans le rectangle BCEF on aura EC = BF ou $H + h_{o} = h_{,} + FG$, mais $H + h_{o} = h_{,} + \int \frac{F}{Mg} ds$, par conséquent $FG = \int \frac{F}{Mg} ds$.

68. Pour connaître la pression qui a lieu dans une section quelconque $\Omega$ dont le centre de gravité soit à la hauteur $z$ au-dessous de celui de la section d'amont $\omega_0$ il faut remarquer que si l'on désigne par U la vitesse de la section $\Omega$, et par P la pression cherchée, on aura pour la section $\Omega$

$$M\left(\frac{U^2-u_0^2}{2}\right)=Mg\left(z-\int\frac{Fds}{Mg}+\frac{p_0-P}{\pi}\right),$$

d'où on obtiendra

$$P=\pi z-\frac{\pi}{Mg}\int Fds+p_0+\left(\frac{u_0^2-U^2}{2g}\right)\pi:$$

équation qui donne la pression cherchée en fonction de $z$ et de U; si le mouvement est uniforme on a $u_0=U$, et il reste $P=p_0+\pi z-\frac{\pi}{Mg}\int Fds$; mais lorsqu'il s'agit d'un courant découvert dont le mouvement est uniforme $\int\frac{F}{Mg}ds=z$ d'où $P=p_0$, c'est-à-dire que la pression est alors égale dans toutes les sections.

Si la valeur de P était nulle ou négative, il faudrait en conclure que le liquide tend à se séparer des parois et même que la masse est discontinue; le courant ne pourrait donc plus être considéré comme ayant un mouvement permanent, ou seulement comme coulant en masse continue dans un vase, lit ou canal, et dans ces circonstances, les équations du mouvement permanent cesseraient d'être applicables.

Considérons une masse liquide continue coulant sans frottement dans un canal à parois solides dont les

sections varient avec continuité ou par degrés insensibles. Lorsque le mouvement sera permanent, un même volume Q de liquide passera par toutes les sections dans chaque unité de temps. Si donc on considère un nombre quelconque de sections $\omega_0$, $\omega_1$, $\omega_2$, etc., dont les vitesses soient $v_0$, $v_1$, $v_2$, etc, et les hauteurs dues à ces vitesses $h_0$, $h_1$, $h_2$, etc., si de plus $p_0$, $p_1$, $p_2$, etc., sont les pressions qu'éprouve le liquide dans les diverses sections, et $z_0$, $z_1$, $z_2$, etc., les distances verticales qui séparent les centres de gravité de ces sections, l'application du principe des forces vives aux deux premières sections donnera $h_1 - h_0 = z_0 + \frac{p_0 - p_1}{\pi}$; le même principe appliqué au sections suivantes prises deux à deux, donnera

$$h_2 - h_1 = z_1 + \frac{p_1 - p_2}{\pi},\ h_3 - h_2 = z_2 + \frac{p_2 - p_3}{\pi} \text{ etc.,}$$

d'où on tirera

$$h_0 + z_0 + \frac{p_0}{\pi} = h_1 + \frac{p_1}{\pi},\ h_1 + z_1 + \frac{p_1}{\pi} = h_2 + \frac{p_2}{\pi},$$

$$h_2 + z_2 + \frac{p_2}{\pi} = h_3 + \frac{p_3}{\pi}, \text{ etc.}$$

Si l'on appelle $H_0$, $H_1$, $H_2$, etc., les distances verticales des centres de gravité des première, deuxième, troisième, quatrième sections à un plan horizontal fixe placé au-dessous de la dernière section, on aura $z_0 = H_0 - H_1$, $z' = H_1 - H_2$, etc., et par suite

$$h_0 + H_0 + \frac{p_0}{\pi} = h_1 + H_1 + \frac{p_1}{\pi} = h_2 + H_2 + \frac{p_2}{\pi} =, \text{ etc.;}$$

c'est-à-dire que la hauteur due à la vitesse, plus la hauteur due à la pression, plus la hauteur du centre de gravité de la section que l'on considère au-dessus d'un plan fixe forme une somme constante.

Lorsqu'il s'agit de courant découvert on a $p_0 = p_1 = p_2 =$, etc., et comme on peut rapporter au niveau de l'eau de chaque section les hauteurs $H_0$, $H_1$, $H_2$, etc., qui dans les courants formés partaient du centre des sections, l'équation que nous venons de trouver devient $h_0 + H_0 = h_1 + H_1 = h_2 + H_2 =$, etc. Il ne faut pas oublier que ces résultats ne sont applicables qu'autant qu'on peut négliger les frottements.

70. Lorsqu'il faut avoir égard aux frottements, les résultats précédents éprouvent certaines modifications dont nous allons nous occuper ; pour simplifier, représentons $\frac{F_0}{Mg}$, $\frac{F_1}{Mg}$, $\frac{F_2}{Mg}$, respectivement par $f_0$, $f_1$, $f_2$, etc. ; nous aurons alors $h_1 - h_0 = z_0 - \int f_0 ds + \frac{p_0 - p_1}{\pi}$, $h_2 - h_1 = z_1 - \int f_1 ds + \frac{p_1 - p_2}{\pi}$, $h_3 - h_2 = z_2 - \int f_2 ds + \frac{p_2 - p_3}{\pi}$, etc., d'où on tirera $h_0 + z_0 + \frac{p_0}{\pi} = h_1 + \frac{p_1}{\pi} + \int f_0 ds$, $h + z + \frac{p_1}{\pi} = h_2 + \frac{p_2}{\pi} + \int f_1 ds$, $h_2 + z_2 + \frac{p_2}{\pi} = h_3 + \frac{p_3}{\pi} + \int f_2 ds$, etc.; et remplaçant $z_0$, $z_1$, $z_2$, respectivement par $H_0$, $H_1$, $H_2$, etc., on obtient

$$h_0 + H_0 + \frac{p_0}{\pi} = h_1 + H_1 + \frac{p_1}{\pi} + \int f_0 ds,$$

$$h_1 + H_1 + \frac{p_1}{\pi} = h_2 + H_2 + \frac{p_2}{\pi} + \int f_2 ds, \text{ etc.}$$

Nous avons vu, dans le n° 67, que les quantités $\int f_0 ds$, $\int f_1 ds$, etc., pouvaient être représentées par des hauteurs que l'on peut appeler hauteurs dues au frottement ou aux résistances qui contrarient le mouvement du liquide. Les résultats précédents peuvent donc s'énoncer ainsi :

*Lorsque l'on considère deux sections quelconques d'un courant permanent, que l'on forme, pour chacune de ces sections, la somme de la hauteur due à la vitesse, de la hauteur due à la pression et de la hauteur du centre de gravité au-dessus d'un plan fixe, la différence entre ces deux sommes sera la hauteur due au frottement.*

Lorsqu'il s'agit de courant découvert ; on a $p_0 = p_1 = p_2$, etc., et comme on peut rapporter au niveau de chaque section les hauteurs $H_0$, $H_1$, etc., les équations trouvées ci-dessus se réduisent à

$$h_0 + H_0 = h_1 + H_1 + \int f_0 ds, \quad h_1 + H_1 = h_2 + H_2 + \int f_1 ds,$$
$$h_2 + H_2 = h_3 + H_3 + \int f_2 ds,$$

ou encore à

$$h_0 + H_0 = h_2 + H_2 + \int f_0 ds + \int f_1 ds = h_3 + H_3 + \int f_0 ds + \int f_1 ds + \int f_2 ds, \text{etc.}$$

c'est-à-dire que, dans les courants découverts, la hauteur due au frottement entre deux sections quelconques, est toujours égale à la différence des hauteurs dues aux vitesses ; à laquelle il faut ajouter la différence de niveau des deux sections. Nous étions d'ailleurs parvenu dans le n° 67 à un résultat analogue, mais alors il avait moins de généralité, car nous ne considérions que deux sections.

71. Nous venons de faire connaître la loi que suit un liquide en mouvement dans un lit ou canal dont les sections varient par degrés insensibles, cherchons actuellement à apprécier les effets dus aux variations brusques des sections.

Lorsque la section d'un courant éprouve une réduction brusque, l'expérience prouve que la veine d'écoulement diminue à partir de la section servant d'orifice, jusqu'à une petite distance où la section reste sensiblement constante; cette diminution de section est le phénomène connu sous le nom de *contraction de la veine fluide*. Nous ne tarderons pas à nous occuper de ce phénomène et de tout ce qui y est relatif. Pour le moment, bornons-nous à dire que l'expérience a appris qu'en appelant $q$ le débit qui aurait lieu s'il n'y avait pas de contraction, et $m$ un coefficient fractionnaire presque constant, pour des circonstances d'écoulement analogues, le débit effectif Q est égal à $mq$. On atténue les effets de la contraction en évasant l'orifice ou en y adaptant un ajutage auquel on donne à très-peu près la forme de la veine fluide, alors le débit est naturellement égal à la plus petite section de l'ajutage par la vitesse due à la hauteur du liquide sur le centre de l'orifice.

Nous pouvons maintenant nous occuper des moyens d'apprécier l'effet dû à un élargissement brusque de section dans un courant rectiligne. Supposons que le liquide traversant la section évasée AB (fig. 13) pénètre dans une partie du lit du courant ayant une

section plus grande. Près de AB, le liquide perd une partie de sa force vive en tourbillonnements, ébranlements et remous; mais, à une certaine distance, le liquide est calme, et le mouvement, toujours permanent, redevient régulier. Admettons que dans la section A'B' le calme soit rétabli, désignons par $u_0$ la vitesse moyenne au passage de la section AB, par $h_0$ la hauteur due à cette vitesse, par $u_1$ la vitesse moyenne au passage de la section A'B', par $h_1$ la hauteur due à cette vitesse, par $p_0$ la pression moyenne par unité de surface de la section AB, par $p_1$ la pression analogue de la section A'B', par $z$ la distance verticale entre le centre de gravité de AB et celui de A'B', par M la masse de liquide qui détermine la permanence du mouvement ou qui, dans chaque unité de temps, passe par toutes les sections du courant. Au passage de la section AB, le liquide possède une quantité d'action égale à $\frac{Mu_0^2}{2}$; entre les deux sections, la pesanteur développe une quantité d'action égale à $Mgz$, les pressions en développent une autre qui est égale à $\frac{Mg}{\pi}(p_0 - p_1)$. La somme des quantités d'actions développées et possédées par le liquide est donc égale à $\frac{Mu_0^2}{2} + Mgz + \frac{Mg}{\pi}(p_0 - p_1)$. Comme on néglige les frottements, cette quantité doit se retrouver dans le liquide en mouvement, sauf celle qui est perdue en tournoyements, laquelle est

égale à $\frac{M(u_0 - u_1)^2}{2}$, on doit donc avoir

$$h_0 + z + \frac{p_0}{\pi} = h_1 + \frac{p_1}{\pi} + \frac{(u_0 - u_1)^2}{2g};$$

c'est-à-dire que le passage de la section AB à la section A'B', produit sur la différence des forces vives le même effet que si, le liquide passant de l'une de ces sections à l'autre par degrés insensibles, le mouvement eût éprouvé une résistance due à la hauteur $\frac{(u_0 - u_1)^2}{2g}$, ou encore que si la distance verticale du centre de gravité de ces sections eût diminué de la hauteur due à la différence des vitesses.

Si l'on appelle $H_0$ et $H_1$ les hauteurs du centre de gravité de AB et de A'B', au-dessus d'un plan fixe, on pourra remplacer $z$ par $H_0 - H_1$, ce qui donnera

$$h_0 + H_0 + \frac{p_0}{\pi} = h_1 + H_1 + \frac{p_1}{\pi} + \frac{(u_0 - u_1)^2}{2g};$$

équation qui fait reconnaître que la quantité d'action que possède le liquide au passage de la première section ne se retrouve pas en entier au passage de la seconde.

Si l'on devait avoir égard au frottement, la perte serait encore plus considérable, car on aurait

$$h_0 + H_0 + \frac{p_0}{\pi} = h_1 + H_1 + \frac{p_1}{\pi} + \int f ds + \frac{(u_0 - u_1)^2}{2g}.$$

Si le courant est découvert, on a $p_0 = p_1$, et il reste

$$h^0 + H_0 = h_1 + H_1 + \frac{p_1}{\pi} + f ds + \frac{(u_0 - u_1)^2}{2g};$$

si l'on avait $u_{,} = u_{0}$, il n'y aurait plus de changement brusque, le mouvement serait uniforme, et l'on aurait $H_{0} = H_{,} + \int f ds$.

Si la section AB était celle d'une veine contractée sortant du vase d'amont par un orifice non évasé, la section AB devrait être prise à l'endroit de la plus grande contraction.

L'équation $h_{0} + z + \frac{p_{0}}{\pi} = h_{,} + \frac{p_{,}}{\pi} + \frac{(u_{0} - u_{,})^{2}}{2g}$, que l'on obtient lorsqu'on peut négliger les frottements, fait reconnaître que la valeur de $z + \frac{p_{0} - p_{,}}{\pi}$ sera nulle lorsque l'on aura $u_{0} = u_{,}$, c'est-à-dire que quand le liquide est obligé de passer à la seconde section avec la vitesse qu'il avait à la première, la hauteur $z$, dont le centre de gravité a varié, doit être égale à la différence des hauteurs dues aux pressions ou à $\frac{p_{,} - p_{0}}{\pi}$. Quand le courant est découvert, on a $p_{,} = p_{0}$, et par suite $z = 0$; c'est-à-dire que quand la vitesse reste la même, non-seulement il n'y a pas de perte de force vive, mais le liquide doit être au même niveau dans les deux sections.

La même équation, lorsque $p_{0} = p_{,}$, donnant encore $u_{,} = \frac{u_{0}}{2} + \sqrt{\left(\frac{u_{0}}{2}\right)^{2} + gz}$ fait voir que tant que $z$ est positif, $u_{,}$ est toujours plus grand que $u_{0}$, et n'est pas susceptible d'avoir une limite; que quand $z$ est négatif, la plus grande valeur que $z$ puisse avoir

est $z = \frac{u_0^2}{4g}$; et correspond à $u_{,} = \frac{u_0}{2}$; c'est-à-dire que cette valeur limite a lieu lorsque la vitesse, au passage de la seconde section, est précisément égale à la moitié de la vitesse que le liquide possède au passage de la première. Dans cette circonstance, sur la force vive $\frac{Mu_0^2}{2}$ que possède le liquide au passage de la première section, la moitié est employée à relever le centre de gravité de la masse, un quart est conservé par le liquide, et un quart est perdu en remous et tourbillons.

Lorsque $z$ est négatif, sa valeur est $z = \frac{-(u_0 - u_{,})u_{,}}{g}$; cette valeur donne, pour les courants découverts, la contre-pente absolue qu'affecte la surface du liquide ou la hauteur absolue du ressaut qui a lieu lorsque le liquide, animé de la vitesse $u_0$, arrive dans une masse dont la vitesse $u_{,}$ est moindre que $u_0$.

Si la vitesse $u_0$ faisait un angle $\alpha$ avec la vitesse $u_{,}$, la quantité d'action perdue en remous et tourbillons, serait encore égale à la quantité d'action totale qu'aurait l'eau d'arrivée, si l'on ramenait au repos celle de sortie ; or cette quantité d'action résulte de la vitesse $u_0$ et d'une vitesse opposée à $u_{,}$, ces deux vitesses, faisant entre elles l'angle $\alpha$, ont pour résultante $\sqrt{u_0^2 + u_{,}^2 - 2u_0u_{,}\cos\alpha}$; la quantité d'action perdue sera donc égale à $\frac{M}{2}(u_0^2 + u_{,}^2 - 2u_0u_{,}\cos\alpha)$, on aura alors

$$\frac{Mu_0^2}{2} + Mgz = \frac{Mu_1^2}{2} + \frac{M}{2}(u_0^2 + u_1^2 - 2u_0u_1\cos\alpha),$$

d'où on tirera $z = \frac{(u_1 - u_0\cos\alpha)u_1}{g}$, quantité qui sera nulle lorsque l'on aura $u_1 = u_0\cos\alpha$, qui deviendra négative si $u_0\cos\alpha$ est plus grand que $u_1$ et qui dans ce cas atteindra sa plus grande valeur lorsque l'on aura $u_1 = \frac{u_0\cos\alpha}{2}$.

Si, dans l'expression $z = \frac{(u_1 - u_0\cos\alpha)u_1}{g}$, on remplace $u_0$ et $u_1$ respectivement par $\sqrt{2gh_0}$ et $\sqrt{2gh_1}$, on aura $z = 2h_1 - 2\cos\alpha\sqrt{h_1h_0}$, qui se réduit à $z = 2h_1$ lorsque $\cos\alpha = 0$, c'est-à-dire que quand les directions des deux vitesses sont perpendiculaires, la hauteur $z$ ou la pente absolue entre les deux sections est indépendante de la vitesse dans la section d'amont, et est égale au double de la hauteur due à la vitesse dans la section d'aval; par conséquent, le liquide, pour conserver au passage de la section d'aval une force vive égale à $Mgh_1$, est obligé de dépenser une force vive égale à $2Mgh_1$.

72. Lorsque la section d'un courant éprouve un brusque rétrécissement, comme cela arrive lorsque l'eau sort d'un vase par un orifice, nous avons déjà dit que l'expérience prouve que la veine d'écoulement diminue de section à partir de l'orifice, ou que l'eau ne sort plus en filets parallèles; cependant, lorsque l'orifice est très-petit, la contraction est très-faible, et les filets sont alors sensiblement parallèles.

Nous allons, dans cette circonstance, déterminer la réduction qu'éprouve la vitesse.

Considérons un vase entretenu constamment plein, désignons par $\omega_0$ la section supérieure du vase, par $u_0$ et $h_0$ la vitesse et la hauteur due à la vitesse dans cette section; $\omega'$, $u_,$ et $h_,$ seront des désignations analogues pour la section inférieure du vase, et $\omega_2$, $u_2$ et $h_2$ pour la section de l'orifice.

Appelons $z$ la distance verticale qui se trouve entre la section supérieure et l'orifice supposé horizontal.

La quantité d'action perdue au passage de l'orifice sera due à la vitesse $u_2 - u_,$, et, d'après ce que nous avons vu dans l'article précédent, on aura

$$h_0 + z = \frac{u_2^2}{2g} + \frac{(u_2 - u_,)^2}{2g};$$

mais la propriété fondamentale du mouvement des liquides donne $u_,\omega_, = u_2\omega_2$ ou $u_, = \frac{u_2\omega_2}{\omega_,}$, par conséquent $\frac{u_2^2}{2g} + \frac{(u_2 - u_,)^2}{2g} = \frac{u_2^2}{2g}\left(1 + (1 - \frac{\omega_2}{\omega_,})^2\right) = h^0 + z$, d'où on tire $u_2 = \frac{\sqrt{2g(h_0 + z)}}{\sqrt{1 + (1 - \frac{\omega_2}{\omega_,})^2}}$ pour l'expression de la vitesse à la sortie de l'orifice.

Si $\omega_2 = \omega_,$, il vient $u_2 = \sqrt{2g(h_0 + z)}$ comme cela doit être, puisqu'alors il n'y a point de perte de force vive. Quelque petit que soit le rapport entre $\omega_2$ et $\omega_,$, il ne peut pas être nul; mais, en diminuant $\omega_2$ et en

augmentant $\omega_1$, on le rendra aussi petit que l'on voudra, en sorte que zéro est la limite de ce rapport. La plus grande valeur que puisse avoir le dénominateur de $u_2$ est donc égale à $\sqrt{2}$. Il résulte de là que, quand on fait sortir un liquide d'un vase par un orifice très-petit et en filets sensiblement parallèles, la vitesse ne peut jamais être moindre que

$$\frac{\sqrt{2g(h_0+z)}}{\sqrt{2}} = 0.71\sqrt{2g(h_0+z)}$$

ou encore $u_2 = \sqrt{2g\left(\frac{h_0+z}{2}\right)}$, c'est-à-dire que, dans cette circonstance, la hauteur due à la vitesse, au passage de l'orifice, est précisément égale à la moitié de la hauteur due à la vitesse qui aurait lieu si la section du vase n'éprouvait pas de rétrécissement.

### V. Méthodes d'interpolation et d'approximation.

73. Les formules générales que fournit l'hydraulique étant d'une application peu facile par la difficulté des intégrations et par la complication des formules, on est obligé de recourir à des méthodes d'approximation que nous allons faire connaître.

On a souvent à calculer les ordonnées de certains arcs d'une faible courbure en fonction de l'inclinaison des tangentes menées à plusieurs de ses points.

Considérons la courbe $m_0$, $m_1$, $m_2$, etc. (fig 14), dont on veut déterminer les ordonnées $a_1m_1$, $a_2m_2$, etc.; connaissant la première ordonnée $a_0m_0$, les inclinai-

sons $I_0$, $I_1$, $I_2$, etc., des tangentes à cette courbe, menées aux points $m_0$, $m_1$, $m_2$, etc., et les distances $d_0$, $d_1$, $d_2$, etc., qui séparent les ordonnées $y_0$, $y_1$, $y_2$, etc. Menons les cordes $m_0m_1$, $m_1m_2$, etc., et les horizontales $m_0b_1$, $m_1b_2$, etc., si l'on connaissait les inclinaisons des cordes sur l'horizon, ou si ces inclinaisons étaient représentées par $i_0$, $i_1$, $i_2$, etc., on aurait $b_1m_1 = i_0d_0$, $b_2m_2 = i_1d_1$, etc., et par suite $a_1m_1 = y_0 + i_0d_0$, $a_2m_2 = y_0 + i_0d_0 + i_1d_1$, etc., et si toutes les distances $d_0$, $d_1$, $d_2$, etc., étaient égales entre elles et à $\frac{l}{n}$, on aurait

$$y_n = y_0 + \frac{l}{n}(i_0 + i_1 + i_2 + \text{etc.}).$$

Mais les inclinaisons $i_0$, $i_1$, $i_2$, etc., n'étant pas connues, il faut chercher à en déterminer la valeur en fonction de l'inclinaison $I_0$, $I_1$, $I_2$, etc., des tangentes; pour cela, considérons un arc AB (fig. 15) d'une faible courbure, appelons $\alpha$ l'angle BAC que la corde AB fait avec l'horizon, $\alpha'$ l'angle OAC que la tangente au point A fait également avec l'horizon, alors $tang\alpha'$ est la quantité connue que nous avons désigné par $I_0$.

Appelons encore $\alpha''$ l'angle OBD ou son égal BOE que la tangente au point B fait avec l'horizon, on aura encore $tang\alpha'' = I_1$.

La longueur AC étant la quantité que nous avons désignée par $d$, on aura $BC = d_0 tang\alpha = i_0d_0$, mais

$$\alpha = \alpha' - OAB = \alpha'' + OBA, \text{ d'où } \alpha = \frac{\alpha' + \alpha''}{2} + \frac{OBA - OAB}{2};$$

or, OBA et OAB étant les angles de la corde AB, avec les éléments extrêmes de l'arc, seront toujours très-petits et sensiblement égaux, surtout si la courbure de cet arc est très-faible; la moitié de la différence de ces angles est donc une quantité négligeable, et l'on peut écrire $\alpha = \frac{\alpha' + \alpha''}{2}$ sans qu'il puisse en résulter d'erreur sensible, nous aurons ainsi :

$$tang\alpha = \frac{tang\frac{\alpha'}{2} + tang\frac{\alpha''}{2}}{1 - tang\frac{\alpha'}{2} \times tang\frac{\alpha''}{2}}.$$

Remarquons actuellement que lorsqu'il s'agit d'angles très-petits, les tangentes sont proportionnelles aux arcs, c'est-dire que l'on a

$$\alpha' : \frac{\alpha'}{2} :: tang.\ \alpha' : tang.\ \frac{\alpha'}{2}, \text{ d'où } tang.\ \frac{\alpha'}{2} = \frac{tang.\ \alpha'}{2},$$

de plus $I_0$ et $I_{,}$ étant des quantités fort petites, le produit $tang.\ \frac{\alpha'}{2} \times tang.\ \frac{\alpha''}{2}$ doit être négligé, il reste donc $tang\ \alpha = \frac{tang.\ \alpha' + tang.\ \alpha''}{2}$ ou $i_0 = \frac{I_0 + I_{,}}{2}$, on aurait de même $i_{,} = \frac{I_{,} + I_2}{2}$, par conséquent l'expression générale d'une ordonnée quelconque en fonction de l'inclinaison des tangentes, lorsque $d_0 = d_{,} = d_2 = \text{etc.}, = \frac{l}{n}$, est donc $y_n = y_0 + \frac{l}{2n}(I_0 + 2(I_{,} + I_2 + \text{etc.},) + I_n)$.

74. Pour le calcul des intégrales définies qui dépendent d'une seule variable on emploie fréquem-

ment une méthode d'approximation, due à Thomas Simpson, que nous allons faire connaître.

Soit $\int X dx$ une intégrale définie dans laquelle X est une fonction quelconque de $x$, on en demande la valeur entre deux limites de $x$; cette question revient à trouver l'aire de la courbe dont l'équation est $y = X$, comprise entre les ordonnées correspondantes aux valeurs extrêmes de $x$.

La méthode que nous allons décrire s'applique à des courbes soumises ou non à la loi de continuité, et on peut obtenir, par son moyen, des résultats qui ne diffèrent des véritables que d'une quantité qu'on peut rendre aussi petite qu'on le désire.

Considérons l'espace compris entre la ligne $a_0 a_1 a_2$, etc. (fig. 16) prise pour axe des $x$ et la courbe $m_0 m_1 m_2$, etc., dont la concavité est tournée vers cet axe. Proposons-nous de déterminer l'expression de l'aire de cet espace; pour cela divisons la partie de l'axe des $x$ comprise entre les ordonnées extrêmes de la courbe, en un nombre pair de parties égales, et par chacun des points de division élevons une ordonnée; plus ces ordonnées seront nombreuses ou rapprochées, plus les résultats que l'on obtiendra approcheront d'une rigoureuse exactitude.

L'esprit de la méthode consiste à regarder la portion de courbe répondant à deux divisions comme appartenant à une portion de parabole, dont l'aire est, comme on sait, égale aux deux tiers du rectangle construit avec la corde et la flèche de l'arc que l'on

considère ; ainsi dans la figure trapèzoïdale $a_0 m_0 m_2 a_2$, l'ordonnée intermédiaire $a_1 m_1$ sera considérée comme un diamètre de la parabole ; l'aire de cette figure sera donc égale à l'aire du trapèze $a_0 m_0 b m_2 a_2$, qui est exprimée par $(y_0 + y_2)\, d$, plus à l'aire parabolique $m_0 m_1 m_2 b$, laquelle est égale à $\frac{2}{3}\, m_1 b \times 2d$, mais $m_1 b = y_1 - \frac{1}{2}\,(y_0 + y_2)$ ; la somme des deux aires est donc égale à $\frac{d}{3}\,(y_0 + 4y_1 + y_2)$.

Si l'on cherche de la même manière les aires des autres trapèzes curvilignes, et que l'on ajoute les aires partielles, pour avoir l'aire totale comprise entre les ordonnées extrêmes, on aura la formule générale suivante :

$$(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \text{etc}\ldots\ y_n)\,\frac{d}{3};$$

dans laquelle $n$ est un nombre pair égal à celui des divisions de l'axe des $x$.

Si les distances $d$ étaient inégales ou pourrait intercaler entre deux ordonnées consécutives, une ordonnée moyenne et appliquer la formule de Simpson à chaque intervalle connu de deux ordonnées. Si par exemple on intercale une ordonnée moyenne entre $y_0$ et $y_1$ séparés par une distance $d$, et que l'on désigne par $y$ cette ordonnée moyenne qui sera à une distance $\frac{d}{2}$ des ordonnées extrêmes, on aura pour l'expression approchée de l'aire comprise entre $y_0$ et $y_1$, $\frac{d}{6}\,(y_0 + 4y + y_1)$.

### VI. Observations générales et fin du premier livre.

75. La théorie générale que nous venons d'exposer comprend toutes les circonstances relatives au mouvement de l'eau considérée comme moteur simple; cette théorie, qui peut paraître trop abstraite aux personnes qui ne sont pas habituées à l'analyse mathématique, ne sera pas indispensable pour comprendre ce qui va suivre; car, pour chacune des questions que nous aurons à traiter, nous donnerons des démonstrations spéciales et d'une grande simplicité; mais dans un ouvrage sur l'hydraulique rationnelle il était nécessaire d'exposer la théorie générale de cette science, afin de mettre à même d'apprécier son état actuel et les progrès dont elle est encore susceptible.

Nous allons maintenant descendre des régions où les vues générales que nous voulions saisir nous obligeaient à rester, pour nous occuper du mouvement permanent de l'eau dans les canaux découverts.

## LIVRE II.

### *Mouvement permanent de l'eau dans les courants découverts.*

#### I. De la mesure des différents éléments d'un courant permanent et principalement de la mesure de la vitesse et de celle du débit.

76. Les questions auxquelles peut donner lieu le mouvement permanent de l'eau dans les courants découverts, sont toutes renfermées dans la question générale dont voici l'énoncé : *Connaissant une partie quelconque du lit d'un courant permanent dans lequel coule un voulume d'eau déterminé, on désire connaître la forme ou la courbure qu'affecte la surface du courant, ou cette forme étant connue, on désire connaître le volume d'eau que débite le courant.*

Comme le lit d'un courant est complétement défini ou déterminé lorsque l'on connaît son profil longitudinal et la forme de ses sections transversales; que le volume que débite un courant dépend de l'aire des sections et de la vitesse du liquide au passage de chacune d'elles; que cette vitesse dépend elle-même de la pente de la surface du courant; il en résulte que la solution des diverses questions que fait naître le mouvement permanent de l'eau dans les courants découverts, exige que l'on puisse mesurer ou calculer les cinq éléments suivants :

1° Le profil longitudinal du lit.

2° La forme ou l'aire des sections transversales.

3° La pente de la surface du courant.

4° La vitesse moyenne au passage de l'une des sections.

5° Le volume d'eau que le courant produit dans l'unité de temps,

Il est donc indispensable que nous indiquions sommairement les moyens dont on se sert pour obtenir chacun de ces éléments.

77. Le profil longitudinal du lit, ses sections transversales et la pente de la surface du courant, sont des éléments géométriques que l'on obtient facilement par des chaînages, des sondages, et par un nivellement fait avec soin. Ces opérations sont fort simples, et les procédés en usage pour les effectuer se trouvent décrits dans la plupart des traités d'arpentage et ne sont pas de nature à trouver place ici. Nous nous occuperons spécialement de la vitesse et du débit.

78. Lorsque l'on connaît le débit d'un courant, il est toujours facile d'obtenir la valeur exacte de la vitesse moyenne qui correspond à une section quelconque; car les aires des sections se mesurent sans difficulté, et l'expression analytique de la propriété fondamentale du mouvement permanent donne pour la vitesse moyenne $u = \frac{Q}{\omega}$.

Le débit peut se calculer avec précision, ainsi que

nous aurons occasion de le faire voir, lorsque l'on connaît le profil longitudinal, ainsi que les aires et la forme des sections transversales; mais comme on est dans l'usage de le déterminer par la vitesse moyenne que l'on obtient au moyen de mesures directes et de calculs, nous devons faire connaître les méthodes et procédés de mesurage et d'appréciation de la vitesse.

79. Les différentes couches ou plutôt les divers filets d'un liquide en mouvement ont une vitesse d'autant plus grande qu'ils sont plus éloignés des parois sur lesquelles la résistance agit avec le plus d'énergie; il en résulte que dans un courant découvert, lorsque l'air est calme, le filet dont la vitesse est la plus grande doit se trouver au milieu de la surface, si la section est symétrique par rapport au plan vertical passant par ce milieu. C'est ce filet de plus grande vitesse que dans une rivière on appelle le *fil de l'eau*, et auquel nous avons conservé le nom d'*axe hydraulique*, qui lui a été donné par M. Vauthier.

Quelques observateurs ont cru reconnaître que le filet de plus grande vitesse ne se trouvait pas à la surface et qu'il était toujours un peu au-dessous; mais M. Desfontaine a conclu de ses nombreuses observations sur le Rhin, qu'abstraction faite de l'action des vents ou lorsque l'air est parfaitement calme, la plus grande vitesse était toujours à la surface.

Les filets animés de la moindre vitesse sont ceux

qui glissent sur l'enduit aqueux des parois; entre la surface du courant et la paroi du lit, la vitesse des différents points, situés sur une même verticale, varie suivant une loi que nous chercherons à déterminer lorsque nous aurons indiqué les divers procédés en usage pour mesurer la vitesse.

(1) Mesure de la vitesse.

80. La vitesse à la surface se détermine facilement par l'observation ; il suffit de laisser flotter des corps légers, au fil de l'eau, par un temps calme, et de choisir, pour cette opération, une partie du courant qui soit rectiligne et régulière. On compte le temps que les corps légers mettent à parcourir une longueur mesurée sur les rives; cette longueur divisée par le temps donne la vitesse à la surface.

On mesure aussi cette vitesse en observant le nombre de tours que fait, dans un temps connu, un moulinet dont les extrémités des ailes trempent dans le courant et en prennent la vitesse.

On mesure encore la vitesse à la surface en observant l'inclinaison d'un fil à l'extrémité duquel est attaché un corps sphérique plongé dans les couches supérieures du courant.

81. La vitesse des points situés au-dessous de la surface de l'eau se détermine au moyen d'instruments appelés *hydromètres*. Nous allons faire connaître ceux que l'on emploie ordinairement, qui sont :

le *pendule hydrométrique* et le *strom-messer* ou moulinet hydrométrique de Woltemann.

Le pendule hydrométrique consiste dans une boule creuse en métal et pesant plus que l'eau, suspendue à un fil dont l'extrémité est fixée au centre d'un quart de cercle gradué. Lorsque la boule plonge dans l'eau, le courant l'entraîne, le fil s'incline et prend une position fixe en rapport avec la vitesse du courant ; il est en effet facile de démontrer que dans cette position d'équilibre, la vitesse est proportionnelle à la tangente de l'angle d'inclinaison; pour cela désignons par $r$ le rayon de la boule supposée sphérique, par P le poids de l'unité de volume de cette boule, par $p$ le poids du mètre cube d'eau, par $i$ l'angle que fait le fil de suspension avec la verticale, lorsque ce fil a pris une position fixe.

Les forces qui agissent sur la boule sont : 1° dans le sens vertical, la pesanteur et la pression de l'eau qui agissent en sens contraire, et donnent pour le poids de la boule dans l'eau $(P - p)\,\frac{4}{3}\pi r^3$.

2° Dans le sens horizontal, l'action de l'eau sur la boule qui est proportionnelle à la quantité de mouvement que possède le liquide ; or cette quantité de mouvement est égale au poids d'une colonne de liquide ayant pour base le grand cercle vertical de la boule dont la surface est $\pi r^2$, et pour hauteur le doublé de celle due à la vitesse. Si $f$ est la valeur de cette force horizontale et $a$ son rapport avec la quantité de mouvement du liquide on aura $f = 2ap\pi r^2 h$.

Mais l'action de ces deux forces sur la boule étant détruite par la liaison du système, il faut que leur résultante suive la direction du fil afin de passer par le point fixe. Si F est la valeur de cette résultante on devra nécessairement avoir $f = F \sin i$, et $(P - p)\frac{4}{3}\pi r^3 = F \cos i$ d'où $f = (P - p)\frac{4}{3}\pi r^3 \tan g i$, égalant cette nouvelle valeur de $f$ à celle trouvée ci dessus, il viendra

$$\frac{4}{3}(P - p)\, r \tan g i = 2aph, \text{ d'où } h = \frac{2(P-p)}{3p} \times \frac{r}{a} \tan g i.$$

Pour une même boule $\frac{2(P-p)r}{3ap}$ est une quantité constante que l'on détermine une fois pour toutes; à cet effet on se sert du pendule sur un courant dont on connaît la vitesse, on a ainsi la valeur de $h$, on mesure alors l'angle $i$, ce qui donne $\tan g i$ et par suite $\frac{2(P-p)r}{3ap} = \frac{h}{\tan g i}$.

Le strom-messer de Woltemann est l'instrument le plus convenable pour déterminer la vitesse en un point quelconque d'un courant. Cet hydromètre se compose d'un axe portant quatre petites ailes disposées comme celles d'un moulin à vent et ordinairement inclinées à 45°. On descend l'instrument au point où l'on veut mesurer la vitesse, on dispose l'axe dans la direction de cette vitesse, le courant fait tourner les ailes, et du nombre des tours faits en un temps donné on conclut la vitesse de l'eau au point où l'instrument est placé. Pour le démontrer, remarquons que la vitesse du courant est proportionnelle

à celle des ailes, et celle-ci l'est au nombre de tours faits dans l'unité de temps. Si donc nous désignons ce nombre de tours par $n$, par $v$ la vitesse, nous aurons $v = an$, $a$ étant un coefficient sensiblement constant pour un même moulinet, et que l'on détermine une fois pour toutes.

Soit maintenant $t$ le temps pendant lequel a duré l'expérience, N le nombre des tours pendant cette durée, on aura nécessairement $t : N :: 1 : n = \frac{N}{t}$, d'où $v = an = \frac{aN}{t}$.

Avec cet instrument on obtient fort exactement la vitesse de l'eau à une profondeur donnée, tant que cette profondeur ne dépasse pas $2^m,00$; mais pour des profondeurs plus considérables, il est difficile d'opérer avec exactitude, surtout lorsque la vitesse à mesurer est supérieure à un mètre, car l'action de l'eau cause alors au support de l'instrument un certain ébranlement qui trouble la régularité du mouvement des ailes.

M. Baumgarten, qui a proposé de donner aux ailettes du moulinet la forme d'une surface héliçoïdale, a opéré à de grandes profondeurs sous l'eau, en se servant d'un fil de fer n° 2, portant à son extrémité une masse de plomb du poids de 75 kilogr., le moulinet était fixé au fil à $0^m,20$, au-dessus de la masse de plomb.

(2) Loi de variation de la vitesse.

82. C'est à l'aide des instruments que l'on vient de décrire que l'on parvient à mesurer la vitesse à la surface, et en un point quelconque de la section d'un courant. On apprécie ainsi la diminution que la vitesse éprouve à mesure qu'on s'éloigne de la surface et qu'on s'approche des parois; mais pour déterminer la vitesse moyenne, il était nécessaire de connaître la loi de distribution de la vitesse dans les différentes parties d'une même section, ou au moins, la relation qui lie la vitesse moyenne à la vitesse à la surface; voici les tentatives qui ont été faites pour atteindre ce but.

Avant le dix-huitième siècle on avait cru pouvoir admettre que la vitesse en chaque point de la section d'un courant augmente avec la profondeur. Pitot, à l'aide du tube hydrométrique qui porte son nom, ne tarda pas à reconnaître que le contraire avait réellement lieu et que la vitesse diminuait avec la profondeur; ce fait, confirmé depuis par une foule d'observations, est aujourd'hui hors de doute.

Vers la fin du dix-huitième siècle, Brünings, à l'aide de son tachomètre, mesura, de pied en pied, les vitesses du Rhin sur une même verticale, et crut reconnaître que les vitesses ainsi obtenues décroissaient comme les ordonnées d'une parabole ayant pour axe la verticale et dont le sommet est tangent au fond.

Funck crut pouvoir admettre que les vitesses sur une même verticale décroissent en progression géométrique lorsque les profondeurs croissent en progression arithmétique.

Dubuat, ingénieur distingué qui s'est beaucoup occupé d'hydraulique, a considéré trois vitesses dans chaque section ; la plus grande qui a lieu, comme on sait, vers le milieu de la surface, la plus petite qui a lieu au fond contre les parois, enfin la vitesse moyenne, celle qui étant multipliée par l'aire de la section, donne le débit du courant dans l'unité de temps. Cet habile hydraulicien a cru reconnaître, par de nombreuses expériences, que la vitesse moyenne telle que nous venons de la définir, était la moyenne arithmétique entre la vitesse au fond et la vitesse à la surface. Appelant $v$ la vitesse contre les parois, V la vitesse du fil de l'eau, $u$ la vitesse moyenne, il avait ainsi $u = \frac{V+v}{2}$ ; il a de plus trouvé que la relation entre la vitesse au fond et la vitesse à la surface était exactement représentée par $\sqrt{V} - \sqrt{v} = 0,165$, ce qui donne pour la vitesse moyenne

$$u = \tfrac{1}{2}(V+v) = (\sqrt{V} - 0,0825)^2 + (0,0825)^2.$$

Mais les expériences de Dubuat ayant été faites dans un canal de petites dimensions et sous de faibles hauteurs d'eau, comprises entre $0^m,05$ et $0^m,27$, ne doivent pas mériter toute confiance ; d'ailleurs les formules, que nous venons de rapporter, laissent encore une certaine valeur à la vitesse moyenne et à

la vitesse au fond, lorsque la vitesse à la surface est nulle, ce qui ne doit pas être. Par conséquent pour de petites vitesses et pour de grandes sections, les formules de Dubuat doivent donner des résultats inexacts.

Prony a cru devoir substituer à la formule de Dubuat, celle que voici $u = V \frac{(V+2,372)}{V+3,153}$. Ce savant pensait d'ailleurs que dans les cas ordinaires de pratique, on pouvait prendre $u = 0,80V$, ou considérer la vitesse moyenne comme sensiblement égale aux quatre cinquièmes de la vitesse à la surface. Plusieurs ingénieurs ont trouvé trop faible le rapport $\frac{u}{V} = 0,80$ et ont proposer de lui subtituer $\frac{u}{V} = 0,82$. D'un autre côté, M. Baumgarten, dans l'intéressant mémoire qu'il a fait insérer en 1847 dans les Annales des Ponts-et-Chaussées, fait observer que la formule de Prony n'est basée que sur quinze expériences dans lesquelles la plus grande valeur de V est de 1,2994; ces expériences lui ayant paru insuffisantes, par leur nombre et la grandeur de la vitesse, il a cherché à déterminer le rapport entre la vitesse moyenne et la vitesse à la surface, au moyen de vingt-deux expériences sur lesquelles vingt présentent pour V une valeur supérieure à $1^m,40$; il a ainsi trouvé que le rapport cherché était assez exactement représenté par

$$\frac{u}{V} = 0,80 \frac{(V+2,372)}{V+3,153}.$$

Ce qui précède prouve suffisamment qu'il ne faut pas accorder toute confiance aux formules empiriques ; heureusement nous pensons que l'on peut se dispenser d'en faire usage, et, lorsqu'il en sera temps, nous indiquerons le moyen de calculer exactement le débit et par conséquent la vitesse moyenne.

83. Jusqu'à ce jour, les expériences qui ont été faites ne contiennent pas assez d'observations sur le décroissement de la vitesse vers les bords. Pour essayer de découvrir la loi de répartition de la vitesse dans une même section, l'ingénieur Raucourt, pendant son séjour en Russie, a fait, à Saint-Pétersbourg, un grand nombre d'observations dans diverses parties du cours de la Néva, qui, sur ce point, a de très-grandes dimensions en largeur et en profondeur. Cet ingénieur a cru reconnaître que les vitesses, sur une même verticale, décroissent suivant les ordonnées d'une ellipse ayant son centre un peu au-dessous de la surface du courant, et dont le sommet est inférieur au fond. Dans un mémoire présenté à l'Académie, Raucourt a consigné les principaux résultats de ses observations; malheureusement ce mémoire est resté inédit et a probablement été égaré depuis la mort de l'auteur.

M. Desfontaine, inspecteur divisionnaire des Ponts-et-Chaussées, qui a fait de nombreuses observations sur le Rhin, a mesuré, dans une section où la profondeur du fleuve était de $1^m.50$, les vitesses à différents points pris sur une même verticale, de vingt

en vingt centimètres. Ces vitesses se confondent sensiblement avec les ordonnées d'une parabole. Voici les résultats de l'observation et des calculs tels qu'ils sont rapportés dans l'Hydraulique de d'Aubuisson, et dans le cours professé par M. Bélanger, à l'Ecole des Ponts-et-Chaussées.

| Profondeurs. | Vitesses | |
|---|---|---|
| | observées. | calculées. |
| 0.00 | 1.226 | 1.226 |
| 0.20 | 1.218 | 1.219 |
| 0.40 | 1.198 | 1.198 |
| 0.60 | 1.167 | 1.163 |
| 0.80 | 1.125 | 1.114 |
| 1.00 | 1.057 | 1.051 |
| 1.20 | 0.950 | 0.974 |
| 1.40 | 0.880 | 0.883 |

(3) Mesure du débit des courants permanents.

84. Si l'on pouvait toujours mesurer directement la vitesse d'un courant ou en déterminer la valeur par des formules convenables, on parviendrait à connaître exactement le débit correspondant, car la section du lit peut se mesurer d'une manière aussi ap-

prochée qu'on le désire, au moyen d'un nombre suffisant de sondages; le produit de l'aire de la section par la vitesse moyenne donnerait le débit du courant, ou un jaugage qui serait d'autant plus exact que les deux facteurs du produit le seraient eux-mêmes.

La vitesse moyenne, pour des courants à section peu considérable, et à peu près régulière, se détermine d'une manière suffisamment exacte par quelques observations hydrométriques, ou par les formules de Dubuat et de Prony; mais lorsque la section est d'une grande étendue et présente plusieurs angles très-prononcés ou que sa profondeur varie brusquement, comme cela arrive lorsqu'un fleuve déborde et recouvre sa vallée d'une couche d'eau de plusieurs mètres d'épaisseur, alors on ne peut plus faire usage de formules empiriques qui ne tiennent aucun compte de la profondeur.

Dans de telles circonstances, il faut remarquer que le débit ou le volume d'écoulement dans l'unité de temps, est égal à celui qui est terminé vers l'amont par la section du courant, vers le haut par la partie de la surface du courant comprise entre l'horizontale de la section, les vitesses à la surface le long des parois et la courbe passant par l'extrémité des lignes égales aux vitesses à la surface; vers le fond et les côtés par la partie de la surface des parois comprise entre la section et la courbe, passant par l'extrémité des lignes égales aux vitesses contre les parois; enfin, vers l'aval, par la surface courbe passant par l'ex-

trémité de toutes les lignes perpendiculaires à la section et égales aux vitesses intermédiaires.

Déterminer le débit d'un courant revient donc à mesurer le volume que nous venons de décrire; or, nous savons, d'après ce qui précède, que les sections de ce volume, par des plans verticaux perpendiculaires à la section du courant, sont terminées par des arcs de parabole, et que l'on pourra déterminer chacun de ces arcs, par deux observations faites sur chaque verticale passant par un point pris sur l'horizontale de la section du courant. Si cette section est assez régulière pour que l'on puisse se contenter d'observations faites sur des verticales équidistantes, le théorème de Simpson donnera le moyen de calculer le volume d'écoulement d'une manière fort approchée. Si, par exemple, on peut diviser l'horizontale de la section du courant en six parties égales, que $l$ soit la longueur de cette horizontale, $y_0$, $y_1$, $y_2$, $y_3$, $y_4$, $y_5$, $y_6$, les aires paraboliques des sections verticales du volume d'écoulement passant par les points de division, on aura pour la valeur du débit

$$Q = \frac{l}{18}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + y_6),$$

et pour la vitesse moyenne

$$u = \frac{Q}{\omega} = \frac{l(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + y_6)}{18\omega}.$$

Si le volume d'écoulement se terminait aux lignes résultant de l'intersection de la surface de l'eau par

deux plans en talus, on aurait $y_0 = o$ et $y_6 = a$, il resterait donc $Q = \frac{l(2y_1 + y_2 + 2y_3 + y_4 + 2y_5)}{9}$.

Lorsque la section du courant sera très-étendue et fort irrégulière, et que l'on voudra mesurer le débit d'un fleuve au moment d'une grande crue, quand l'eau est sortie de son lit et coule sur le fond de la vallée, on choisira, dans une saison convenable et lorsque l'eau est encore dans son lit, le point sur lequel on doit opérer, que l'on aura soin de prendre dans une partie où le courant suit une direction sensiblement rectiligne, et occupe à peu près le milieu de la vallée; alors, pour diminuer les difficultés et la durée de l'opération, on levera le profil exact de la section du courant et de la vallée passant par le point choisi, puis on fixera d'une manière invariable les extrémités de cette section de manière à pouvoir les retrouver en temps convenable. Lorsque la crue sera arrivée, on en rapportera la hauteur sur la section; puis, sur les verticales correspondantes à des points de divisions déterminés par les irrégularités du lit, on fera, à des hauteurs différentes, deux observations sur la vitesse. Ces observations donneront le moyen de calculer l'aire parabolique de chaque section verticale du volume d'écoulement, et, comme on connaît les distances entre ces sections, on obtiendra d'une manière fort approchée le débit du courant, et par suite, la vitesse moyenne qui n'est pas nécessaire au jaugeage, mais qui pourra servir de terme de

comparaison pour apprécier le degré d'exactitude des formules empiriques dont on fait ordinairement usage.

Le débit donnera d'ailleurs la vitesse moyenne en un point quelconque du courant permanent dont la section est connue et permettra de déterminer la pente en ce point.

Dans les observations dont il vient d'être question, il faut éviter de mesurer la vitesse à la surface, parce que cette mesure ne peut être exacte que lorsque l'air est dans un calme parfait et que l'on peut être obligé d'opérer à un moment où ce calme n'existe pas. On évitera encore de mesurer la vitesse trop près du fond ou à une trop grande profondeur, parce que, dans ces circonstances, on ne peut être certain d'opérer avec précision.

Nous ne tarderons pas à exposer (n° 146) une méthode de calcul à l'aide de laquelle quelques opérations de nivellement suffiront pour déterminer exactement le débit sans connaître la vitesse moyenne; on pourra alors obtenir la vraie valeur de cette vitesse sans recourir à des opérations difficiles et sans faire usage de formules empiriques.

## II. Des forces et résistances auxquelles est soumis le mouvement de l'eau.

### (1) La gravité est la cause première du mouvement de l'eau.

85. La gravité est la cause première du mouvement de l'eau dans le lit des rivières et des fleuves, et la pente de ces courants est la cause immédiate du mouvement, car de l'inclinaison de la surface résulte, pour chacune des molécules situées sur la même verticale, une différence entre les pressions qu'elle éprouve en amont et en aval. Ces molécules sont ainsi sollicitées à se mouvoir dans le sens où elles sont moins pressées, et, par conséquent, dans le sens de la pente.

La force motrice d'un courant nous paraît donc provenir de la pente de la surface; si cette pente est constante et que la section soit également constante, le mouvement est uniforme, ainsi que cela a lieu sur la plus grande partie des canaux à eau courante creusés par la main des hommes.

86. Le courant dont le mouvement est uniforme et la section constante est nécessairement permanent, comme cela résulte de la relation $u\omega = Q$, qui est, ainsi qu'on l'a vu précédemment (52), l'expression analytique de la propriété fondamentale des courants permanents.

Pour qu'un courant permanent ait un mouvement

uniforme, il suffit que sa section soit constante, car alors sa vitesse l'est nécessairement; il peut donc exister des courants à mouvement uniforme dont la pente soit variée. Cela résulte d'ailleurs de la relation $u\omega = Q$, car cette relation étant indépendante de la pente, elle prouve que si la section est constante de surface, la vitesse est également constante, et que quelle que soit la pente, le mouvement est nécessairement uniforme.

Lorsque la pente d'un courant est constante et que la section varie de forme et d'étendue, le courant est permanent à pente constante, mais son mouvement n'est pas uniforme et est nécessairement varié.

87. L'eau qui coule dans un lit, canal ou tuyau étant soumise à l'action de la gravité devrait descendre d'un mouvement accéléré, si aucune résistance ne venait contrarier cette accélération; mais l'expérience apprend qu'au bout d'un temps très-court, le mouvement cesse de s'accélérer, que sa vitesse ne varie qu'entre des limites assez rapprochées, et que cela a lieu même lorsque la pente est très-considérable. Cet effet est évidemment dû à des résistances qui détruisent l'action de la pesanteur ou qui s'opposent à l'accélération que cette action tend à produire.

Ce qui précède, en nous donnant une idée des résistances qui limitent l'accélération du mouvement de l'eau dans les canaux découverts, nous porte naturellement à distinguer les différentes causes des résistances, et à chercher à apprécier la part d'in-

fluence que chacune d'elles exerce sur le mouvement.

(2) Des résistances qui s'opposent à l'accélération du mouvement de l'eau.

88. Lorsque l'on considère une masse continue de liquide en mouvement dans un vase, lit ou canal quelconque, on reconnaît que cette masse, toujours soumise à l'action de la pesanteur, est en contact avec l'atmosphère qui presse sa face supérieure lorsque le courant est découvert, et sur les parties découvertes lorsque l'eau se meut dans un canal fermé; que sur le contour ou seulement sur une partie du contour de chaque section, le liquide est en contact avec les parois du vase; lit ou canal dans lequel il coule.

Les parois, par leur affinité pour le liquide, retiennent les couches avec lesquelles elles sont en contact; et les empêchent de participer au mouvement; sur ces couches adhérentes, les parties les plus voisines glissent en frottant; le reste, soumis à la cohésion ou à la viscosité du liquide et retenu par le frottement des couches inférieures, n'obéit qu'en partie à l'action de la pesanteur; enfin, la surface supérieure peut éprouver une résistance sensible de la part de l'air qui la presse et contre lequel elle se meut.

Lors donc que l'on réfléchit sur les causes ou résistances qui tendent à modifier le mouvement de l'eau, ou à contrarier l'action de la pesanteur, on trouve

ainsi que ces causes sont au nombre de quatre, qui sont :

1° Le frottement contre la couche d'air en contact avec la surface du courant ;

2° L'adhérence du liquide pour les parois sur lesquelles il coule ;

3° Le frottement du liquide contre les couches adhérentes aux parois ;

4° L'adhésion des molécules entre elles ou la viscosité du liquide.

Toutes ces résistances concourent à limiter l'action de la pesanteur. Leur effet général est une réduction dans la vitesse de la masse liquide, accompagnée d'une variation très-sensible dans la vitesse des différents points d'une même section.

Étudions le mode d'action de chacune de ces résistances, puis nous chercherons à les exprimer analytiquement.

89. L'air étant un fluide d'une extrême mobilité, on est porté à penser que ses molécules ou les couches qui sont en contact avec la surface d'un courant, doivent suivre sans résistance le mouvement de cette surface. Cela n'est cependant pas conforme à l'observation, car si l'air n'exerçait aucune influence sur le mouvement, la plus grande vitesse devrait toujours se trouver au milieu de la surface des courants dont le lit est sensiblement rectiligne et à peu près régulier; or, cela n'a lieu que lorsque l'air est parfaitement calme. Il résulte, en effet, des expérien-

ces de M. Desfontaine sur le Rhin, et de l'ingénieur Raucourt sur la Néva, que, dans cette circonstance, la vitesse à la surface est égale à la vitesse *maxima*, en sorte que, dans un temps calme, l'action du frottement de l'eau contre l'air est très-faible et à peu près insensible.

Si l'air est agité, l'effet du frottement devient alors bien sensible. Lorsque, par exemple, le vent souffle dans une direction contraire à celle du courant, la vitesse à la surface en est diminuée et devient moindre que la vitesse *maxima*.

Lorsque le vent souffle dans la direction même du courant, la vitesse à la surface augmente et surpasse la vitesse *maxima* du temps calme.

Mais lorsque l'on considère un courant dans un temps calme, on peut, sans erreur sensible, négliger l'action du frottement de l'eau contre l'air, car la couche d'air, en contact avec la surface du liquide, ne tarde pas à participer au mouvement, ce qui réduit la résistance et tend à annihiler son effet.

90. Lorsque l'on verse de l'eau sur une surface ou paroi quelconque en matière non soluble et non susceptible d'être désagrégée, mais pour laquelle le liquide a quelque affinité, cette eau adhère à la paroi ou la mouille. Si la surface est assez étendue, ou la quantité d'eau assez petite, le liquide converti en enduit aqueux, formera une couche très-mince qui pourra ne prendre aucun mouvement malgré une certaine inclinaison donnée à la paroi.

L'adhérence en retenant ainsi une couche de liquide contre la paroi, tend à diminuer l'aire de la section et ne peut modifier le mouvement que dans le cas où la section du liquide est assez petite ou assez mince pour que la couche de l'enduit aqueux forme une partie notable de cette section, comme cela peut avoir lieu dans les canaux ou tubes capillaires et dans ceux dont la pente est très-faible et la section de peu d'épaisseur, circonstances qui sont toujours étrangères à l'hydraulique.

91. Lorsqu'un liquide coule dans un vase, lit ou canal quelconque dont les parois présentent certaines aspérités, les couches inférieures de ce liquide, contrariées dans leur mouvement par le frottement et les chocs successifs contre ces aspérités, perdent ainsi une partie de leur vitesse et glissent en frottant, avec la vitesse qui leur reste, sur l'enduit aqueux adhérent aux parois.

La résistance d'un liquide contre les parois le long desquelles il glisse, doit donc être attribuée à la rencontre directe et successive des molécules contre les aspérités que présentent ces parois, et à l'action des molécules qui remplissent les pores et qui y sont retenues par l'adhérence. On admet ordinairement, d'après les observations de Dubuat et les ingénieuses expériences de Coulomb, que ce frottement est indépendant de la nature des parois, de leur degré de poli, et même de la nature de l'enduit qui peut les recouvrir.

Dubuat n'a trouvé aucune différence dans le frot-

tement lorsqu'il faisait couler de l'eau, sous une même pente, sur du verre, du plomb, du fer, du bois, et sur différentes espèces de terre. On doit donc admettre que le frottement de l'eau contre les parois du lit dans lequel ce liquide se meut, reste constant quelle que soit la nature de ces parois, pourvu toutefois qu'elles soient susceptibles d'être mouillées. On conçoit d'ailleurs que le frottement cesse d'être indépendant de la nature des parois, lorsque la matière dont elles sont formées se laisse entraîner par le mouvement de l'eau, ou lorsque ces parois se garnissent d'herbes qui augmentent ainsi l'étendue des surfaces frottantes.

92. Si le liquide était sans viscosité ou si les molécules étaient sans cohésion, elles glisseraient sans résistance les unes sur les autres, l'adhérence contre les parois et les chocs contre leurs aspérités ne feraient éprouver de perte de vitesse qu'aux couches inférieures, les supérieures continueraient à se mouvoir avec la vitesse due à l'action de la pesanteur. La masse liquide se composerait donc de deux parties distinctes; l'une, dont l'épaisseur serait en rapport avec la saillie des aspérités des parois, aurait un mouvement retardé par la résistance due au frottement; l'autre, recouvrant la première, aurait un mouvement accéléré par l'action de la pesanteur; mais les choses ne se passent pas ainsi, la cohésion du liquide transmet aux couches supérieures une partie de la résistance que le frottement fait éprouver aux couches

inférieures; l'homogénéité du liquide rend cette transmission graduelle, et la perte de vitesse, sur une même verticale, diminue depuis la couche qui glisse sur l'enduit aqueux des parois, jusqu'à la surface supérieure de la masse liquide.

Pour exprimer analytiquement la loi de variation de la vitesse sur une même verticale, considérons (fig. 17) un courant dont AB soit la superficie et CD le fond, AC = H est la partie d'une verticale comprise entre le fond et la superficie; rapportons sur les lignes AB, EF, GH, etc., parallèles à l'axe du courant, les vitesses mesurées à la surface et aux profondeurs E, G, I, etc., et faisons passer par les extrémités des vitesses la courbe BFHKLD, cette courbe représentera la loi de variation de la vitesse.

Appelons V la vitesse à la surface, W la vitesse au fond, $v$ la vitesse d'un filet situé à la profondeur $z$, $\frac{dv}{dz}$ sera la tangente de l'angle de l'un des éléments de la courbe avec la verticale; si ce rapport était constant, la ligne serait droite; mais les observations de Brühings, de Raucourt et de M. Desfontaine, prouvent que ce coefficient est nécessairement variable; la réflexion fait d'ailleurs reconnaître que les variation de la vitesse doivent croître dans un plus grand rapport que la profondeur, car chaque molécule, outre son impulsion propre qui lui fait devancer la molécule immédiatement inférieure, participe, au moyen de la cohésion, à la quantité de mouvement

que possède la molécule immédiatement supérieure.

Le rapport $\frac{dv}{dz}$ varie donc nécessairement avec la profondeur $z$, et l'homogénéité du liquide porte à penser que les variations de ce rapport doivent être proportionnelles à la profondeur, ce qui donne $\frac{dv}{dz}=-jz$; $j$ étant un nombre constant, la valeur du rapport $\frac{dv}{dz}$ doit être affectée du signe —, car la profondeur étant comptée de la surface, $dv$ et $dz$ sont nécessairement de signe contraire. L'intégration donne ensuite $v=V-\frac{jz^2}{2}$, puisque l'on doit avoir $v=V$ lorsque $z=o$. On a ainsi $W=V-\frac{jH^2}{2}$ puisque $v=W$ lorsque $z=H$.

Pour déterminer la valeur de $j$, supposons qu'après avoir mesuré la vitesse à la surface on trouve qu'à la profondeur $h$, la vitesse est $v'$, on en conclura que $j=\frac{2(V-v')}{h^2}$.

La vitesse moyenne sera $u=\frac{\int vdz}{H}=\frac{\int Vdz-\frac{j}{2}\int z^2dz}{H}$, intégrale qu'il faudra prendre depuis $z=o$ jusqu'à $z=H$, ce qui donnera $u=V-\frac{1}{6}jH^2$, mais

$$j\frac{H^2}{2}=V-W=3\ (V-u),\ \text{d'où}\ u=\frac{2V+W}{3},$$

relation indépendante de la profondeur du courant.

Nous conclurons de ce qui précède :

1° Que les vitesses qui correspondent aux différents

points d'une même verticale, varient comme les abscisses d'une parabole du second degré;

2° Que sur une même verticale la vitesse moyenne est égale aux $\frac{2}{3}$ de la vitesse à la surface, auxquels il faut ajouter le tiers de la vitesse au fond;

3° Que la plus petite valeur que puisse avoir la vitesse moyenne correspond à la plus petite valeur de la vitesse au fond; si cette dernière pouvait être nulle, la vitesse moyenne serait égale aux deux tiers de la vitesse à la surface.

On peut d'ailleurs apprécier directement l'effet dû à la cohésion ; pour cela considérons une masse de liquide d'une largeur indéfinie se mouvant uniformément sur une paroi plane dont l'inclinaison est I et qui se trouve à la profondeur H au-dessous de la surface du liquide; dans ce cas toutes les molécules qui forment une des couches parallèles au fond seront animées d'une vitesse égale; mais l'observation fait reconnaître que dans tout courant, la vitesse diminue lorsque l'on passe d'une couche à une autre plus rapprochée des parois, ou que sur une même verticale, la vitesse diminue quand la profondeur augmente, ce que l'on peut exprimer analytiquement en disant que la vitesse est fonction de la profondeur et en écrivant $v = fz$. Si $z$ devient $z + dz$, $v$ deviendra $v - dv$, on aura donc $\frac{dv}{dz} = -f'z$; mais $\frac{dv}{dz}$ est la tangente de l'angle que l'élément de la courbe des vitesses qui se trouve à la profondeur $z$ fait avec la

verticale; cet angle n'est pas constant, car nous savons que les variations des vitesses croissent dans un plus grand rapport que la profondeur; on reconnaît d'ailleurs facilement que cet angle dépend de la cohésion, et que dans des liquides différents il varie en sens inverse de la cohésion, car il serait droit si la cohésion était nulle, et il serait nul si le liquide devenait solide, ou si la cohésion était infinie par rapports aux quantités de mouvement que possèdent les molécules; dans un même liquide la cohésion F sur l'unité de surface sera donc une certaine fonction de $\frac{dv}{dz}$, c'est-à-dire que l'on aura $F = \varphi\left(\frac{dv}{dz}\right)$.

Pour déterminer la forme de la fonction $\varphi$, considérons un plan parallèle à la paroi, situé à la profondeur $z$ au-dessous de la surface; le mouvement étant uniforme dans chaque couche parallèle à la paroi, il faut qu'il y ait équilibre sur ce plan entre l'action de la pesanteur décomposée suivant la pente et la force retardataire due à la cohésion. Si $\pi$ est le poids de l'unité de volume de liquide, $\pi z$ sera le poids de la colonne de liquide qui presse sur l'unité de surface, la composante de ce poids suivant la pente sera $\pi z I$; c'est l'expression de l'action de la pesanteur sur les couches du liquide supérieures au plan que nous considérons. La force retardatrice, due à la cohésion, qui fait équilibre à cette action, est d'abord proportionnelle au nombre des points en contact ou à la densité du liquide exprimée par $\frac{\pi}{g}$; son action sur

l'unité de surface est donc $\frac{\pi}{g}F = \frac{\pi}{g}\varphi\left(\frac{dv}{dz}\right)$, on doit donc avoir $\pi z I = \frac{\pi}{g}\varphi\frac{dv}{dz}$, ou $gzI = \varphi\left(\frac{dv}{dz}\right)$; la différentiation donne ensuite $gI = -\varphi'\left(\frac{dv}{dz}\right)\frac{d^2v}{dz^2}$. D'après la forme de la fonction $\varphi$ on reconnaît que $\varphi'\left(\frac{dv}{dz}\right)$ doit être une quantité constante que nous représenterons par $\alpha$; on aura donc $gI = -\alpha\frac{d^2v}{dz^2}$, dont l'intégrale est $gIz = -\frac{\alpha dv}{dz}$, car $z$ et $\frac{dv}{dz}$ doivent être nuls en même temps; intégrant de nouveau et remplaçant $\frac{\alpha}{g}$ par $\varepsilon$, on obtiendra $v = c - \frac{Iz^2}{2\varepsilon}$.

Pour déterminer la constante arbitraire, il faut remarquer que V étant la vitesse à la surface on doit avoir $v = V$; lorsque $z = o$ on a donc $c = V$ et par suite $v = V - \frac{Iz^2}{2\varepsilon}$. L'équation que nous venons de trouver nous apprend que dans tout courant à pente constante et à mouvement uniforme dont la largeur est indéfinie, la courbe déterminée par les extrémités des vitesses qui correspondent aux diffrents points d'une verticale, est une parabole dont le sommet est au niveau de l'eau; ce résultat est d'ailleurs confirmé par les observations de M. Desfontaine, dont les résultats sont consignés dans l'hydraulique de d'Aubuisson, et dans le cours d'hydraulique de M. Bélanger.

Si $h'$ est la hauteur de la section, on aura la vitesse au fond que nous désignerons par W, en faisant $z=h'$, ce qui donnera $W=V-\frac{Ih'^2}{2\varepsilon}$, d'où on pourra tirer $\frac{I}{2\varepsilon}=\frac{V-W}{h'^2}$, et par suite $v=V-(V-W)\frac{z^2}{h'^2}$. Quant à la vitesse moyenne $u$, on a pour la déterminer $uh'=\int_0^{h'}vdz=Vh'-\frac{Ih'^3}{6\varepsilon}$, d'où $u=V-\frac{Ih'^2}{6\varepsilon}=V-\frac{V-W}{3}=\frac{2V+W}{3}$; mais il ne faut pas oublier que cette expression de la vitesse moyenne ne convient qu'autant que la section du courant a une hauteur constante et une largeur indéfinie.

Dans un courant rectiligne à section circulaire, si l'on considère une des couches concentriques, celle située à la distance $z$ du centre, pour cette couche on aura $\pi z^2 I=-2\pi z\varepsilon\frac{dv}{dz}$ ou $\frac{dv}{dz}=-\frac{Iz}{2\varepsilon}$, d'où

$$v=V-\frac{Iz^2}{4\varepsilon}.$$

Le volume ayant pour base la section circulaire et pour limite la surface déterminée par les extrémités des vitesses, sera donc, dans ce cas, un paraboloïde de révolution dont l'axe est celui du courant; le volume de ce paraboloïde étant la moitié de celui du cylindre, de même base et de même hauteur, il en résulte que sa hauteur moyenne est égale à la moitié de la hauteur du cylindre ou à $\frac{1}{2}$ (V—W), et comme la vitesse moyenne est égale à cette hauteur, à laquelle il faut ajouter la vitesse contre les parois, on trouve

ainsi pour l'expression de cette vitesse

$$W + \tfrac{1}{2}(V - W) = \tfrac{1}{2}(V + W),$$

résultat conforme aux observations faite par Dubuat. Si nous considérons maintenant un courant à section rectangulaire et à largeur limitée, alors un filet quelconque dont la section est $dzdy$ est soumis à une force accélérative $\pi i \times dzdy$, de la part de la pesanteur; il est entraîné par le filet supérieur et retardé par le filet inférieur avec une intensité proportionnelle à sa largeur $dy$ et à sa vitesse relative, la résultante de ces deux forces est égale à

$$-\pi\varepsilon \times \frac{dv}{dz}dy + \pi\varepsilon \times \frac{d(v - dv)}{dz}dy = -\pi\varepsilon \times \frac{d^2v}{dz}dy;$$

il est également entraîné par le filet de droite et retardé par le filet de gauche, par des forces dont la résultante est égale à $-\pi\varepsilon \times \frac{d^2v}{dy}dz$.

On a donc pour l'équation d'équilibre d'un filet quelconque $\pi \times dzdyi = -\pi\varepsilon \times \frac{d^2v}{dy}dz - \pi\varepsilon \times \frac{d^2v}{dz}dy$, et la surface déterminée par l'extrémité des vitesses est ici représentée par l'équation aux différences partielles $i = -\varepsilon\frac{d^2v}{dz^2} - \varepsilon\frac{d^2v}{dy^2}$.

C'est M. Navier qui le premier a démontré que la résistance due à la cohésion dans les liquides a pour expression $-\varepsilon\frac{dv}{dz}$, et qui a donné l'équation aux différences partielles que nous venons de poser.

Depuis la perte si regrettable de ce savant distin-

gué, M. Sonnet s'est occupé du même sujet dans un mémoire sur le mouvement rectiligne et uniforme des eaux; plus récemment, M. Dupuit, dans ses études sur le mouvement des eaux courantes, a fait quelques applications de la théorie dont nous venons de nous occuper, à la détermination de la vitesse moyenne dans un courant à section rectangulaire quelconque. Comme ces recherches ont, en ce moment, peu d'utilité pratique, nous croyons sans avantage de donner sur ce sujet de plus amples développements.

93. Il résulte donc de ce qui précède que l'action de l'air sur la vitesse d'un courant, toujours insensible dans un temps calme, tend principalement à modifier la vitesse à la surface; que l'effet de l'adhérence consiste à réduire la section d'un courant d'une quantité qui est en général inappréciable; que cet effet ne peut devenir sensible, sous une pente déterminée, que dans des canaux et tubes capillaires, ou bien encore lorsque, la pente étant à peu près nulle, la section a peu d'épaisseur.

Que la résistance due au frottement réduit la vitesse dans la couche en contact avec les parois, en sorte que cette vitesse est souvent beaucoup moindre qu'elle ne serait si le frottement n'existait pas.

Que l'effet de la cohésion ou de la viscosité du liquide consiste à transmettre à toute la masse, et suivant certaines lois, la résistance que le frottement fait naître.

La combinaison de l'effet dû au frottement avec

celui dû à la cohésion forme donc la principale cause qui réduit la vitesse en chaque point, ou qui lui enlève l'excès de vitesse que la gravité tend à imprimer. Le frottement limite la vitesse au fond ou contre les parois, la cohésion détermine les variations de la vitesse depuis le fond jusqu'à la surface, et oblige de substituer à la vitesse effective de chaque point, une vitesse moyenne que l'on peut regarder comme étant commune à tous les points d'une même section, puisque le débit est égal à cette vitesse multipliée par l'aire de la section.

Cherchons maintenant à exprimer analytiquement l'action combinée de cette résistance, puis nous déterminerons, au moyen des observations à notre connaissance, le coefficient numérique nécessaire aux applications.

(3) Expression analytique de la résistance totale.

94. Les lois de la mécanique nous donnent le moyen d'obtenir une première expression de la résistance; en effet, considérons le cas le plus simple, celui qui a lieu lorsque le courant a une pente constante et une section également constante de surface et de forme.

Le mouvement étant permanent et la section constante, l'expression analytique de la propriété fondamentale des courants permanents $u\omega = Q$, fait reconnaître que la vitesse est également constante et

que le mouvement est nécessairement uniforme.

Désignons par H la différence de niveau entre les sections extrêmes de la partie du courant que l'on considère. Soient :

$l$ la longueur de cette partie ;

I la pente pente par mètre qui est égale à $\frac{H}{l}$ ;

M la masse constante que le courant débite dans chaque unité de temps ;

Q le volume qui correspond à cette masse ;

$\pi$ le poids du mètre cube d'eau ;

$g$ la gravité ;

$u$ la vitesse moyenne ;

$\omega$ l'aire de la section ;

$\chi$ son contour.

On aura d'abord $Mg = \pi Q = \pi\omega u$.

Le mouvement étant uniforme, la variation de la force vive est nulle, et la quantité d'action imprimée par la force motrice est rigoureusement égale à celle absorbée par la résistance ; or, l'action exercée par la pesanteur est égale au poids du liquide décomposé suivant la pente ou multiplié par I, cette action a donc pour expression $\pi\omega l I = \pi\omega H$, la quantité d'action imprimée par la pesanteur, dans l'unité de temps, est donc égale à $\pi\omega H u = MgH$.

Mais, F étant la résultante des résistances, cette force absorbe, dans l'unité de temps, une quantité d'action égale à $Fu$, on doit donc avoir $Fu = MgH$, relation fort simple qui exprime que la puissance de

l'eau est entièrement employée à vaincre les résistances : de la relation précédente on tire $F = \frac{MgH}{u}$, lorsque H est la hauteur dont la masse M descend dans l'unité de temps, alors $\frac{H}{u} = I$ et $F = MgI$, c'est-à-dire que, dans cette circonstance, la résistance est égale à l'action du poids $Mg$, que le courant débite dans chaque unité de temps, décomposé suivant la pente.

L'expression que nous venons de trouver, pour la résistance, est seulement due aux lois de la mécanique et est à peu près indépendante des circonstances physiques du système dont nous nous occupons, lesquelles, cependant, doivent être prises en grande considération; nous allons avoir égard à ces circonstances, afin de trouver une autre expression de la résistance F, qui nous permette d'éliminer cette inconnue.

95. Dans les solides, la force de cohésion rend toutes les parties solidaires; dans les liquides, au contraire, la cohésion étant très-faible, les différentes molécules sont à peu près indépendantes les unes des autres.

Cette différence constitutive, entre les solides et les liquides, en produit une dans la résistance que ces corps éprouvent lorsqu'ils glissent sur un plan incliné. Pour apprécier cette dernière différence, remarquons que le poids d'un corps solide se répartit

entre tous ses points d'appui. Si ce corps n'a qu'un point d'appui, la pression, en ce point, est égale au poids; si le nombre des points d'appui double, triple, quadruple, le nombre des éléments frottants croît dans le même rapport, mais la pression exercée sur chacun, supposée également répartie, n'est plus que la moitié, le tiers ou le quart de ce qu'elle était d'abord, et comme le frottement est proportionnel à la pression, il est donc indépendant du nombre des points d'appui et, par conséquent, des surfaces frottantes qui sont égales à la somme des points d'appui, ou plutôt à la somme des éléments en contact.

Si maintenant nous considérons un corps solide décomposé en une infinité de prismes verticaux, juxtaposés sans adhérence, et reposant par leur base sur un plan incliné, et si nous supposons que ce système glisse uniformément sur le plan, la résistance que chacun des prismes éprouvera sera proportionnelle à son poids ou à son volume, et la résistance totale sera proportionnelle à la somme de tous les poids ou de tous les volumes; or, dans la circonstance que nous examinons, la somme de tous les volumes est égale au produit de la surface frottante par une hauteur moyenne à déterminer dans chaque cas. On voit donc qu'ici le frottement, loin d'être indépendant de la surface frottante, doit, au contraire, lui être toujours proportionnel.

Si nous considérons une certaine masse de liquide contenue dans un lit rectiligne à section et à pente

constantes, dont toutes les molécules soient animées d'une vitesse égale et parallèle à la direction du lit, système que l'on peut réaliser en supposant la masse liquide comprise entre deux sections solides parallèles entre elles et perpendiculaires à la direction du lit; alors ce système pourra être assimilé au précédent, et la résistance due au frottement sera proportionnelle à la surface des parois sur laquelle le liquide glisse; pour obtenir l'expression analytique de la résistance due au frottement, nous pourrons donc dire que cette résistance étant un effet du glissement des molécules du liquide sur les parois, elle croît avec l'étendue de ces parois et est proportionnelle à la partie de leur surface que l'eau recouvre et sur laquelle elle coule.

Si donc nous désignons par $l$ la longueur de la partie du courant que l'on considère; par $\chi$ le périmètre de la section recouverte par l'eau, ou la largeur développée des parois; par $f$ la résistance due au frottement par unité de surface des parois, nous devrons avoir $F = \chi l f$.

96. Pour déterminer le frottement $f$ par unité de surface, nous rappellerons qu'il est indépendant de la nature des parois, puis nous ferons observer qu'il dépend de la vitesse du liquide, car il varie avec cette vitesse et devient nulle avec elle; pour reconnaître la loi de cette dépendance, nous distinguerons trois cas, qui sont :

1° Celui où la vitesse est sensiblement la même

pour tous les points d'une même section, comme cela a lieu lorsque, la vitesse étant quelconque, la section est très-petite, ou encore lorsque, la section étant quelconque, la vitesse est très-faible.

2° Celui où la vitesse varie d'une manière continue du fond vers la surface, comme cela a généralement lieu lorsque les parois forment une surface continue dont les aspérités sont faibles.

3° Celui où la vitesse éprouve quelques variations brusques, telles que celles qui sont causées par de fortes inégalités du lit, ou par la discontinuité de la surface des parois.

Si la section est très-petite, comme cela a lieu dans les tubes capillaires, ou si la hauteur de cette section est très-petite relativement à sa largeur, tous les filets seront animés d'une vitesse égale, et le mouvement du liquide sera peu différent de celui d'un corps solide, c'est-à-dire que, dans ce mouvement, la résistance due au frottement sera proportionnelle à la pression ou au poids du liquide qui lui-même est proportionnel au volume ou au produit de la section par la vitesse ; par conséquent, dans les circonstances que nous considérons, la résistance due au frottement est proportionnelle à la première puissance de la vitesse.

La même chose aura encore lieu, si la section étant quelconque, le mouvement du liquide est très-lent, car alors les variations de la vitesse, depuis le fond jusqu'à la surface, étant à peine sensible, la résistance

sidérations physiques
it à $F = \pi\chi l \times 2jh$,
$jh$, ou simplement

te de la surface ou du

gné par I, $\frac{\omega}{\chi}$ est ce que l'on

le rayon moyen de la section ;
s par R, nous aurons $RI = 2jh$,
$2j$ par $d$, $RI = uh$, pour la relation
tout courant à mouvement uniforme
onstante, entre la pente, le rayon moyen
teur due à la vitesse.

e relation, probablement peu différente de celle
e nous venons de trouver, a été donné par Chézy,
dans un mémoire manuscrit cité par M. de Prony,
dans sa théorie des eaux courantes. Désirant prendre
connaissance de ce mémoire, nous avons fait à son
sujet d'inutiles recherches, nous n'avons pu nous le
procurer.

M. de Prony, pour la relation qui nous occupe, a
proposé $RI = \alpha u + \beta u^2$, dans laquelle $\alpha$ est assez petit
par rapport à $\beta$, pour que l'on puisse fréquemment
négliger le premier terme $\alpha u$ devant le second $\beta u^2$ ;
il reste alors $RI = \beta u^2$, relation qui ne diffère de celle
que nous avons trouvée que par la valeur du coefficient.

Dans les études sur le mouvement des eaux courantes, publiées récemment par M. Dupuit, ce savant

tesse moyenne et $j$ un coefficient supposé constant, à déterminer par l'observation.

Dans les circonstances ordinaires, telles que la pratique les présente, l'expression générale de la résistance due au frottement contre les parois déduites de considérations physiques, est donc $F = \pi\chi l \times 2jh$; nous ne tarderons pas à faire usage de cette expression pour obtenir l'équation du mouvement uniforme.

Lorsque la vitesse éprouve des variations brusques causées par les irrégularités du lit et les fortes aspérités des parois; alors la résistance, qui contrarie le mouvement, ne provient pas seulement du frottement; elle est due, en grande partie, aux chocs successifs que le liquide éprouve de la part des obstacles qui contrarient son cours, chocs qui détruisent une partie de la force vive que possède les molécules; comme la force vive que possède un courant est toujours proportionnelle au cube de la vitesse, il en résulte que, dans les circonstances que nous considérons, la résistance croît dans un plus grand rapport que le carré de la vitesse. Nous ne nous arrêterons pas plus longtemps sur ces circonstances qui se présentent rarement dans les cas ordinaires de pratique.

(4) Relation entre la pente, la hauteur due à la vitesse et le rayon moyen de la section d'un courant dont le mouvement est uniforme; conséquences de cette relation.

97. L'application du principe des forces vives à un courant dont le mouvement est uniforme, nous a

donnné (94) $F = \pi\omega H$ ; des considérations physiques sur le même système nous ont conduit à $F = \pi\chi l \times 2jh$, on doit donc avoir $\pi\omega H = \pi\chi l \times 2jh$, ou simplement $\frac{\omega}{\chi} \times \frac{H}{l} = 2jh$ ; mais $\frac{H}{l}$ est la pente de la surface ou du fond, que nous avons désigné par I, $\frac{\omega}{\chi}$ est ce que l'on est convenu d'appeler le rayon moyen de la section ; si nous le désignons par R, nous aurons $RI = 2jh$, ou en remplaçant $2j$ par $d$, $RI = dh$, pour la relation qui existe dans tout courant à mouvement uniforme et à pente constante, entre la pente, le rayon moyen et la hauteur due à la vitesse.

Une relation, probablement peu différente de celle que nous venons de trouver, a été donné par Chézy, dans un mémoire manuscrit cité par M. de Prony, dans sa théorie des eaux courantes. Désirant prendre connaissance de ce mémoire, nous avons fait à son sujet d'inutiles recherches, nous n'avons pu nous le procurer.

M. de Prony, pour la relation qui nous occupe, a proposé $RI = \alpha u + \beta u^2$, dans laquelle $\alpha$ est assez petit par rapport à $\beta$, pour que l'on puisse fréquemment négliger le premier terme $\alpha u$ devant le second $\beta u^2$ ; il reste alors $RI = \beta u^2$, relation qui ne diffère de celle que nous avons trouvée que par la valeur du coefficient.

Dans les études sur le mouvement des eaux courantes, publiées récemment par M. Dupuit, ce savant

ingénieur obtient les équations suivantes

$$R\Gamma = aw + bw^2 \text{ et } Iz = -\varepsilon \frac{dv}{dz},$$

dont la première donne la vitesse $w$ contre les parois, et l'autre la vitesse d'un filet quelconque en fonction de la pente et de la profondeur $z$ de ce filet au-dessous de la surface du courant. M. Dupuit pense que ces deux équations peuvent servir à résoudre tous les problèmes relatifs au mouvement uniforme des eaux courantes. Nous ne pouvons partager cette opinion, et nous pensons que si la première de ces équations était susceptible d'application elle conduirait à des résultats inexacts; en effet, d'après cette équation, la résistance F aurait pour expression générale

$$F = \frac{\pi}{g} \chi l (aw + bw^2),$$

elle augmenterait par conséquent avec la vitesse au fond, et serait nulle avec elle, tandis que c'est l'inverse qui doit avoir lieu, car plus le frottement contre les parois est considérable, plus la vitesse au fond doit être faible, et si cette vitesse pouvait être nulle, alors la résistance serait la plus grande possible ; on ne peut donc admettre avec M. Dupuit que la résistance devienne nulle en même temps que la vitesse au fond. D'ailleurs V étant la vitesse à la surface, la seconde des équations ci-dessus donne pour la section rectangulaire, à grande largeur $V = W + \frac{Ih'^2}{2\varepsilon}$, rela-

tion qui fait reconnaître que la vitesse au fond sera nulle lorsque l'on pourra avoir $V = \frac{Ih'^2}{2\varepsilon}$.

M. Sonnet, d'après les expériences de Couplet, a trouvé $\varepsilon = \frac{1}{3200}$, et si l'on prend $h' = 1$, on aura $V = 1600I$, c'est-à-dire que sur tous les courants à section rectangulaire d'un mètre de profondeur et d'une largeur indéfinie, la vitesse au fond sera nulle lorsque la vitesse à la surface pourra être égale à 1600 fois la pente; ainsi, un courant d'un mètre de profondeur dont la pente est de 0.00219 et la vitesse à la surface de $3^m.51$, aura nécessairement une vitesse nulle contre les parois. D'après la première des équations de M. Dupuit, il faudrait conclure que la résistance sur ce courant est nulle, ce qui évidemment ne peut pas être.

98. L'équation $RI = ah$ est susceptible de plusieurs transformations qu'il est bon de faire connaître.

Si L est la largeur de la section et $h'$ sa hauteur moyenne, on aura $\omega = Lh'$; la même relation subsisterait encore si $h'$ était la hauteur réelle et L la largeur moyenne. Comme $R = \frac{\omega}{\chi} = \frac{Lh'}{\chi}$, si l'on remplace R par cette dernière valeur, on aura $ILh' = a\chi h$, relation curieuse entre les différents éléments de la section dans les courants découverts à pente constante et à mouvement uniforme.

Lorsque la largeur L de la section est considérable,

elle peut être prise pour le contour sans qu'il puisse en résulter d'erreur sensible; il reste alors $h'I = ah$, c'est-à-dire que la hauteur due à la vitesse est proportionnelle à la hauteur de la section, dans les courants très-larges et à mouvement uniforme. Si la section renferme le plus de surface sous le moindre périmètre, alors $R = \frac{h'}{2}$ et $h'I = 2ah$, ce qui donne $I = a$, lorsque $h' = 2h$.

Si l'on remplace $h$ par sa valeur $\frac{v^2}{2g}$, on aura $2gRI = av^2$; mais $2gR$ est le carré de la vitesse $v$ due à la hauteur R, on a donc $Iv^2 = av^2$, et lorsque $v = u$, $I = a$; c'est-à-dire que pour tous les courants à mouvement uniforme, dont la vitesse moyenne est due à une hauteur égale au rayon moyen, la pente I est égale au coefficient $a$; réciproquement lorsqu'un courant aura cette pente, sa vitesse moyenne sera due à une hauteur égale au rayon moyen.

La propriété fondamentale des courants permanents $u\omega = Q$, nous donne $\frac{u^2\omega^2}{2g}$ ou $h\omega^2 = \frac{Q^2}{2g}$; cette relation combinée avec RI ou $\frac{\omega I}{\chi} = ah$, donne

$$I = \frac{aQ^2}{2g} \times \frac{\chi}{\omega^3},$$

par conséquent, pour un même débit, la pente I sera constante avec le rapport $\frac{\chi}{\omega^3}$. Cette propriété est un cas particulier de la propriété plus générale qui ré-

sulte de la constance du rapport $\frac{h}{R}$, car lorsque ce rapport reste constant, la pente l'est nécessairement.

La relation $F = \frac{MgH}{u} = \pi\chi l \times \frac{au^2}{2g}$, donne

$$MgH = \pi\chi l \times \frac{au^3}{2g},$$

et fait voir que la quantité d'action $MgH$ développée dans chaque unité de temps sur la longueur $l$, est proportionnelle au cube de la vitesse. Si l'on divise par $l$, on aura pour la quantité d'action développée sur l'unité de longueur $MgI = \pi\chi \times \frac{au^3}{2g}$; si nous désignons par $i$ la hauteur qui, sur la pente I, correspond à une longueur égale à la vitesse $u$, nous aurons $1 : I :: u : i = Iu$ ou $I = \frac{i}{u}$ et $Mgi = \pi\chi \frac{au^4}{2g}$, mais $Mgi$ est la quantité d'action développée par la masse M, lorsque son centre de gravité s'abaisse de la hauteur $i$, c'est réellement la quantité d'action développée pendant l'unité de temps sur la longueur $u$, cette quantité est donc proportionnelle à la quatrième puissance de la vitesse.

(5) Valeur numérique du coefficient qui entre dans l'expression de la résistance.

99. Nous devons maintenant chercher à reconnaître si l'expérience confirme la constance du coefficient qui entre dans la relation $RI = ah$; pour

trouver la valeur numérique de $a$ et en vérifier la constance, nous avons calculé le rapport $\frac{RI}{h}$, pour les quatre-vingt-dix-neuf expériences dont les résultats se trouvent dans le recueil des cinq tables publié par M. de Prony, et nous avons reconnu qu'en omettant quelques observations dont les résultats paraissent anormaux, ce rapport était sensiblement constant et égal à 0.007848.

Pour vérifier ce premier travail, nous avons déterminé, par la valeur numérique de $a$, la vitesse qui correspond à chaque expérience, calcul facile puisque le produit RI, divisé par 0.007848, donne la hauteur due à la vitesse, et que les tables publiées depuis longtemps par Navier et Gényès font de suite connaître la vitesse qui correspond à chaque hauteur.

Nous présentons dans le tableau n° 1, pour toutes les expériences, les vitesses observées et les vitesses calculées :

1° Par la formule $RI = 0.007848h$ que nous proposons ;

2° Par la formule de Prony,

$$RI = 0.0000444\int u + 0.00030931u^2.$$

3° Par la formule d'Eytelwein,

$$RI = 0.00002426u + 0.00036554u^2.$$

Comme les observations, dont les résultats sont consignés dans les tables de Prony, se rapportent à des courants dont le débit est compris entre 6 litres et 4,739,000 litres par seconde, la comparaison des

des diverses valeurs que nous avons obtenues, mettra hors de doute la constance du rapport $\frac{RI}{h}$, et l'exactitude de la relation si simple $RI = ah$.

Les différences entre les vitesses observées et les vitesses calculées ne varient généralement, en plus ou en moins, que de quantités moindres que $\frac{1}{20}$; cependant quelques différences s'élèvent jusqu'au douzième et une seule jusqu'au sixième; mais alors les formules de Prony et d'Eytelwein donnent des différences au moins aussi fortes, lesquelles semblent provenir d'un défaut de précision dans les observations, principalement dans les moyens d'obtenir la vitesse qui tantôt a été calculée par les formules empiriques de Dubuat et de Prony, lesquelles ne peuvent donner qu'une approximation, et qui tantôt a été déduite d'observations, plus ou moins exactes, faites à l'aide d'un hydromètre; ces différences peuvent aussi provenir d'observations faites sur des courants dont la section n'était pas constante et dont le mouvement était, par conséquent, naturellement varié; on n'a pu alors obtenir les valeurs exactes du rayon moyen et même de la pente, il a fallu se contenter de valeurs moyennes qui ont dû conduire à des résultats plus ou moins approchés de la réalité.

Pour conclure de ce qui précède la valeur de $f$ ou de la résistance par unité de surface, il faut se rappeler que l'on a $f = 2\pi jh = j\frac{\pi}{g}u^2$, comme $j = \frac{a'}{2}$,

$\pi = 1000$, $g = 9.81$, on a d'abord $\frac{\pi}{g} = 101.936$, et par suite, $j\frac{\pi}{g} = \frac{\pi a}{2g} = 0.40$, par conséquent

$$f = 0.40u^2 = 0.80gh,$$

mais on a aussi $F = \pi\omega H = \chi l f$ ou $\pi\frac{\omega}{\chi} \times \frac{H}{l} = \pi RI = f$, on a donc $\pi RI = 0.80gh$, ou $\frac{\pi}{g}RI = 0.80h$, et comme $\frac{\pi}{g}$ est égale à la densité du liquide que l'on peut représenter par $\sigma$, il en résulte que $\sigma RI = 0.80h$, relation aussi simple que facile à retenir. Il convient encore de faire observer que la relation $\frac{\pi a}{2g} = 0.40$ donne $\frac{2g}{a} = \frac{\pi}{0.40} = \frac{1000}{0.40} = 2500$, nombre qu'il est utile de ne pas oublier.

### (6) De la section de moindre résistance dans les courants à lit régulier et à pente constante.

100. L'équation $RI = ah$ est celle du mouvement uniforme de l'eau dans les courants découverts ; elle convient, par conséquent, aux courants à lit régulier et à pente constante. Comme ces courants, lorsqu'ils sont permanents, débitent un même volume d'eau avec une vitesse constante, il en résulte que le mouvement y est nécessairement uniforme, au moins tant que leur lit ne présente point certains obstacles, tels que pertuis, barrages, ponts, etc.

Le moment de nous occuper de toutes les questions relatives à ces courants n'est pas encore venu, nous nous bornerons ici à faire observer que la régularité de leur lit donne lieu à une question purement géométrique sur la forme qu'il convient de donner à la section de ce lit; en effet, l'équation $RI = ah$ fait reconnaître que pour une pente donnée I, la hauteur $h$ due à la vitesse et, par conséquent, le débit croîtront avec R ou le rayon moyen; lors donc que sous la même pente et avec une même surface de section, il s'agira de mener le plus d'eau possible au point où doit aboutir le courant, il conviendra de donner à la section le plus grand rayon moyen ou d'adopter pour sa forme celle qui, sous le même périmètre, présente le plus de surface. Comme cette propriété convient au cercle, il en résulte que la section à donner à un courant, pour qu'il conduise le plus d'eau avec la même section, ou la même quantité d'eau avec la moindre section, devra avoir la forme d'un demi-cercle.

La forme demi-circulaire est donc celle qu'il conviendrait d'adopter pour la section d'un canal en fonte, en bois, en maçonnerie et autres matières dont la cohésion est assez considérable pour que l'on puisse donner aux parois toutes les inclinaisons comprises entre l'horizontale et la verticale; mais lorsqu'un canal est ouvert dans des terres, l'inclinaison des parois étant limitée par la consistance qu'elles présentent, la forme demi-circulaire cesse alors de con-

venir, car, avec cette forme, les bords ayant une trop forte inclinaison ne tarderaient pas à s'ébouler.

Pour que des terres imbibées d'eau puissent se soutenir, il faut leur donner un talus dont l'inclinaison ou le rapport de la hauteur à la base soit compris entre $\frac{2}{3}$ et $\frac{2}{5}$; on est ainsi conduit à donner à la section des canaux ouverts dans les terres, la forme d'un trapèze dont les côtés ont un talus déterminé par la nature du sol ou par celle des matériaux dont ces côtés sont parfois revêtus.

Lorsque des canaux sont destinés à conduire de l'eau, soit pour des irrigations, soit pour alimenter un réservoir ou une usine, on peut en général faire varier leur largeur et leur profondeur entre certaines limites; alors, pour déterminer les dimensions de la section qu'il convient de préférer, il faut chercher, parmi les sections de même figure, celle qui présente la plus grande surface sous le même périmètre, ou, ce qui revient au même, le plus petit périmètre pour la même surface.

101. Pour résoudre la question dont nous venons de parler, désignons par $n$ la largeur du plafond de la section du canal, par $h'$ la hauteur de cette section, par $b$ un coefficient constant dépendant de l'inclinaison des deux côtés, par $c$ un autre coefficient dépendant du rapport entre la longueur des côtés et la hauteur $h'$ de la section.

L'aire de la section sera exprimée par $\omega = nh' + bh'^2$,

et son contour ou le périmètre mouillé sera exprimé par $\chi = n + ch'$.

L'une des quantités $\omega$ et $\chi$ devant rester constante tandis que l'autre doit atteindre sa valeur *maxima* ou sa valeur *minima*, il en résulte que l'on doit avoir en même temps

$$h'dn + ndh' + 2bh'dh' = o, \text{ et } dn + cdh' = o,$$

ce qui donne pour la relation qui doit exister entre les quantités $n$ et $h'$, $n = (c - 2b)h'$, et par suite $\chi = n + ch' = 2(n + bh')$; mais $\omega = (n + bh')h'$, par conséquent, la valeur cherchée du rayon moyen est $R = \frac{\omega}{\chi} = \frac{h'}{2}$, c'est-à-dire que parmi toutes les sections de même forme, celle qui renfermera une surface égale sous le plus petit périmètre aura un rayon moyen égal à la moitié de sa hauteur.

Si $c = 2b$ alors $n = o$, l'expression de l'aire de la section se réduit à $\omega = bh'^2$, et celle de son contour à $\chi = 2bh'$. Ces relations conviennent au demi-cercle dont le rayon est $h'$, lorsqu'on y fait $b = \frac{\pi}{2}$ et même au cercle entier lorsqu'on y fait $b = \pi$.

Les mêmes relations conviennent également à des polygones symétriques dont l'inclinaison des côtés est telle que l'on ait $c = 2b$.

Si $b = o$, l'aire de la section est alors $\omega = nh'$, et convient à la section rectangulaire dont le contour est $\chi = n + 2h'$, ce qui donne $c = 2$ et par suite $n = 2h'$, par conséquent la largeur de la section rec-

tangulaire, qui offre le moins de résistance au mouvement de l'eau, doit être double de sa hauteur.

Si la section est un trapèze symétrique, alors $b$ est la tangente de l'angle que les côtés font avec la verticale, et $c$ est le double de la sécante de cet angle, c'est-à-dire que l'on a $c=2\sqrt{1+b^2}$. L'équation de condition $n=(c-2b)\,h'$ donne $n+bh'=(c-b)\,h'$, et par suite $\omega=(c-b)\,h'^2$, on obtient ainsi

$$h'=\frac{\sqrt{\omega}}{\sqrt{c-b}},\ n=\frac{\sqrt{\omega}}{\sqrt{c-b}}(c-2b),\ \text{et}\ \chi=n+ch'=2\sqrt{\omega(c-b)}.$$

Si la section est un trapèze non symétrique, alors $b$ est égal à la demi-somme des tangentes des angles des côtés avec la verticale ; si $b'$ et $b''$ représentent ces tangentes, on obtiendra

$$b=\frac{b'+b''}{2}\ \text{et}\ c=\sqrt{1+b'^2}+\sqrt{1+b''^2}.$$

En mettant ces valeurs de $b$ et de $c$ dans celles de $h'$ et de $n$, on aura les valeurs de ces quantités qui conviennent à la question dont on s'occupe.

Si l'un des côtés du trapèze est vertical on a $b'=o$, d'où $b=\frac{b''}{2}$ et $c=1+\sqrt{1+b''^2}$. Pour toutes les formes de section que nous venons d'examiner, comme pour toutes celles auxquelles peut convenir la relation, $n=(c-2b)h'$, le rayon moyen sera toujours égal à la moitié de la hauteur.

102. Il arrivera fréquemment que l'on ne pourra pas satisfaire à la relation $n=(c-2b)\,h'$, alors la forme de la section ne pourra pas être telle qu'elle

offre le moins de résistance au mouvement de l'eau. Dans cette circonstance, si la forme de la section est encore celle d'un trapèze, il suffira de connaître deux des quatre quantités $\omega$, $\chi$, $h'$ et $n$ pour trouver les deux autres; en effet si les quantités $n$ et $h'$ sont données on aura, pour l'aire de la section, $\omega=(n+bh')h'$, et pour son contour $\chi=n+ch'$.

Si au contraire l'aire $\omega$ et le contour $\chi$ étaient donnés, on trouverait facilement $h'=\frac{\chi+\sqrt{\chi^2+4\omega(c-b)}}{2(c-b)}$, et par suite la valeur de $n$ que l'on sait être égale à $\chi-ch'$.

Si l'aire de la section et sa hauteur $h'$ sont données, on en conclura pour l'expression de la largeur, $n=\frac{\omega-bh'^2}{h'}$, et pour celle du contour $\chi=\frac{\omega+(c-b)h'^2}{h'}$.

Si l'aire $\omega$ et la largeur $n$ sont données, on trouvera pour la hauteur $h'=\frac{-n+\sqrt{n^2+4b\omega}}{2b}$, et pour le contour $\chi=n+ch'$.

Si le contour $\chi$ et la hauteur $h'$ sont données, on aura pour l'expression de la largeur $n=\chi-ch'$, et pour l'aire de la section, $\omega=\chi h'-(c-b)h'^2$.

Si le contour $\chi$ et la la largeur $n$ sont donnés, l'expression de la hauteur sera $h'=\frac{\chi-n}{c}$, et celle de la section $\omega=\left(n+\left(\frac{\chi-n}{c}\right)b\right)\left(\frac{\chi-n}{c}\right)$.

Lors donc que l'on connaîtra deux des quatre quantités $\omega$, $\chi$, $h'$ et $n$, on pourra considérer les

quantités $\omega$ et $\chi$ comme des données de la question, cela évitera des développements désormais inutiles, et facilitera les applications que nous aurons à faire sur les courauts à lit régulier.

103. Avant de terminer ce qui est relatif à la forme des sections d'un courant, remarquons que l'expression générale du rayon moyen est $R = \frac{(n+bh')\,h'}{n+ch'}$, dans laquelle $c$ sera toujours plus grand que $b$ et par conséquent R plus petit que $h'$ ; mais lorsque l'on pourra avoir $b=o$ et $c=o$, il viendra $R=h'$, c'est la plus grande valeur que puisse avoir le rayon moyen, c'est celle dont il approche dans les sections rectangulaires à largeur indéfinie.

Nous avons vu, dans l'article précédent, que la valeur du rayon moyen qui correspond à la section de moindre résistance était $R=\frac{h'}{2}$, par conséquent la forme des sections peut faire varier du simple au double le rapport entre le rayon moyen et la hauteur, puisque les valeurs de ce rayon sont généralement comprises entre $h'$ et $\frac{h'}{2}$. Il faut donc se garder de remplacer seulement $\frac{\omega}{\chi}=R$, par $h'$, car en agissant ainsi on n'obtient qu'une limite ; il faut encore remplacer R par $\frac{h'}{2}$, afin d'obtenir une deuxième limite qui permettra d'apprécier l'importance de la valeur du rayon moyen dans les questions qu'on peut avoir à résoudre.

ns de voir que toutes les sections
, qui renferment la plus grande sur-
même périmètre, ont un rayon moyen
2 ; si nous introduisons cette relation dans
uation du mouvement uniforme $RI = ah$, nous aurons $I = \frac{2ah}{h'}$, pour la pente des canaux dans lesquels l'eau coule avec le moins de résistance.

Parmi les canaux qui offrent le moins de résistance au libre cours des eaux, ceux dont la vitesse sera telle que l'on ait $h' = 2h$, auront tous une pente égale à $a$. Cette propriété est d'ailleurs un cas particulier de la relation beaucoup plus générale $h = R$, c'est-à-dire que lorsque dans un courant la hauteur due à la vitesse est égale au rayon moyen, la pente est nécessairement égale à $a$. Ainsi le courant pour lequel $R = \frac{h'}{2}$, est celui qui à égalité de section présentera le moins de résistance au libre cours des eaux, et le courant pour lequel on aura en même temps $R = \frac{h'}{2} = h$, sera celui qui conduira le plus grand volume d'eau avec la moindre résistance.

### III. Des courants permanents, dont le mouvement n'est pas uniforme.

#### (1) Equations du mouvement permanent dans les courants découverts.

105. Considérons une partie quelconque d'un courant dont le mouvement soit permanent sans être

uniforme, ou dont la vitesse moyenne constamment la même pour chaque section, varie en passant d'une section à une autre, et proposons-nous de déterminer la pente absolue de ce courant en fonction des éléments dont elle dépend.

Ici, comme dans le mouvement uniforme, nous ferons abstraction des pressions qui ont eu lieu dans chaque section, puisque nous savons (61) que le mouvement du liquide est uniquement dû à la pente absolue de sa surface.

Nous supposerons l'air parfaitement calme, ou nous négligerons l'action des vents qui agite parfois la surface des courants, et qui tend à modifier leur mouvement, parce que cette action est accidentelle et que ses effets sont toujours très-limités.

La gravité qui produit la pente est donc la seule cause du mouvement de l'eau, celle qui tend à l'accélérer, et qui l'accélérerait indéfiniment si la résistance due au frottement contre les parois du lit, ne venait imposer des limites à cette accélération. Nous savons, en effet, que si une masse M de liquide, animée de la vitesse $u_0$, et possédant par conséquent une force vive égale à $\frac{Mu_0^2}{2}$, descend de la hauteur H, ou reçoit de la pesanteur une quantité d'actions égale à $MgH$, elle devrait posséder à la fin de sa chute, si le liquide n'éprouvait ni choc ni résistance, une force vive égale à $\frac{Mu_0^2}{2} + MgH$; c'est-à-dire que si l'on

désigne par $u_1$, la vitesse que cette masse aurait alors, on devrait avoir $\frac{Mu_1^2}{2} = \frac{Mu_0^2}{2} + MgH$; ou en divisant par $Mg$ et remplaçant $\frac{u_0^2}{2g}$ et $\frac{u_1^2}{2g}$ par les hauteurs dues aux vitesses $h_0$ et $h_1$, on aurait $h_1 = h_0 + H$. Par conséquent si la quantité d'action primitivement possédée par le liquide et celle imprimée par la pesanteur se retrouvaient en entier dans le liquide écoulé, la pente absolue H serait précisément égale à la différence des hauteurs dues aux vitesses, et la relation $H = h_1 - h_0$ serait l'équation du mouvement permanent de l'eau dans un courant quelconque.

Mais, nous avons déjà eu occasion de le dire, les choses ne se passent ainsi que dans des circonstances exceptionnelles, et l'expérience prouve que le mouvement ne s'accélère pas en raison de la hauteur dont le liquide descend ; car le mouvement, sans être uniforme, ne varie qu'entre des limites assez rapprochées, cela a même lieu lorsque la pente est considérable.

Ces différents effets sont évidemment dus à des résistances qui affaiblissent ou détruisent l'action de la pesanteur.

106. Pour apprécier l'action des résistances qui s'opposent à l'accélération du mouvement de l'eau, désignons toujours par F la résultante de ces résistances; $Fds$ sera le moment virtuel de cette force, mais

$ds = udt$, l'action élémentaire de la résistance sera donc égale à $Fudt$, et comme dans le mouvement permanent la vitesse moyenne qui correspond à chaque section est indépendante du temps, il en résulte que la quantité d'action absorbée par la résistance pendant l'unité de temps, au passage de la section dont la vitesse est $u$, sera $Fu$; on aura donc $\frac{Mu_1^2}{2} = \frac{Mu_0^2}{2} + MgH + Fu$ divisant par $Mg$, et remplaçant $\frac{u_0^2}{2g}$ et $\frac{u_1^2}{g}$ par $h_0$ et $h_1$; on aura $H = \frac{Fu}{Mg} + h_1 - h_0$.

Pour trouver la valeur, du terme $\frac{Fu}{Mg}$, rappelons-nous que dans les numéros 93 et 94, nous avons trouvé que lorsque le mouvement est uniforme, l'expression générale de la résistante est $F = \pi\chi l \times ah$; mais lorsque le mouvement est permanent sans être uniforme, cette expression doit subir certaines modifications que nous allons chercher à déterminer; pour cela remarquons que, dans le mouvement permanent, la vitesse étant indépendante du temps, si nous partageons le courant que nous considérons en tranches infiniment minces, par des plans perpendiculaires à l'axe, on pourra regarder la vitesse moyenne comme constante dans l'étendue de chaque tranche. Le courant permanent sera ainsi remplacé par une suite de tranches infiniment minces et à mouvement uniforme, dont les vitesses seront différentes entre elles.

Si nous considérons une des tranches, dont nous

venons de parler, sur son étendue infiniment petite $dl$, la résistance aura pour expression $\pi a \times \chi h dl$, et sur l'ensemble des tranches, cette résistance sera $F = \pi a \int \chi h dl$; la quantité d'action absorbée, pendant l'unité de temps, par cette résistance, au passage de la section dont la vitesse est $u$, sera donc $Fu = \pi a \int \chi h u dl$; ce qui donnera $\frac{Fu}{Mg} = \frac{\pi a \int \chi h u dl}{\pi \omega u} = \frac{a \int \chi h dl}{\omega}$, car $Mg$ étant le poids du liquide, qui, pendant l'unité de temps, passe par toutes les sections, on a nécessairement $Mg = \pi \omega u = \pi \omega_0 u_0 = \pi \omega_1 u_1$; substituant, dans l'équation trouvée ci-dessus, la valeur du rapport $\frac{Fu}{Mg}$, on obtiendra $H = a \int \frac{\chi h dl}{\omega} + h_1 - h_0$, ou si l'on veut $dH = \frac{a \chi h dl}{\omega} + dh$; et en faisant $\frac{a\chi}{\omega} h = \frac{ah}{R} = f$, on aura pour l'équation différentielle du mouvement permanent $dH = f dl + dh \ldots$ (1).

Lorsque le mouvement est uniforme, on a $h_1 = h_0$, ou $dh = o$; ce qui donne $\frac{dH}{dl} = f = \frac{ah}{R} = I$ comme cela doit être.

Il résulte de ce qui précède que la pente relative I, de la superficie d'un courant, n'est égale à $\frac{ah}{R}$ que dans le cas particulier où le mouvement est uniforme; dans toute autre circonstance, cette pente a pour expression $\frac{dH}{dl} = f + \frac{dh}{dl}$. Quand le mouvement est très-lent, ou quand la vitesse ne varie que par

degrés insensibles, en passant d'une section à une autre qui en est très-voisine, alors la quantité $\frac{dh}{dl}$ est fréquemment négligeable et l'on peut prendre $f$ pour I sans qu'il puisse en résulter d'erreur ; cependant, dans ces circonstances, il conviendra de déterminer la valeur de $\frac{dh}{dl}$ pour les sections qui ont la plus grande vitesse moyenne, afin de reconnaître si au passage de ces sections, la quantité dont il s'agit peut encore être négligée.

107. L'équation (1), que nous venons d'obtenir par des considérations fort simples, va nous conduire à des résultats intéressants ; elle nous apprend d'abord que si l'on construit le rectangle CF (fig. 12), dont la base soit égale à $l$ ou à la longueur de la partie du courant que l'on considère, et dont la hauteur CE soit égale à $H+h_0$ ; si sur le côté FB de ce rectangle on prend $BG=h_1$, la hauteur FG sera égale à l'intégrale $\int f dl$ que nous représenterons par F. Comme cette quantité ne dépend que de la différence de niveau des sections et des hauteurs dues aux vitesses qui correspondent à ces sections, elle restera la même pour tous les courants qui auront une pente absolue égale, et dont les vitesses des sections extrêmes seront aussi égales, quels que soient d'ailleurs les débits de ces courants et la longueur de la partie que l'on considère.

Si maintenant nous concevons la courbe dont

l'équation est $F = \int f dl$, cette courbe à partir du point E, aura pour ordonnées $\int f dl$ ou les hauteurs perdues en résistances par la force vive du liquide; ces ordonnées pourront donc s'appeler *les hauteurs dues aux résistances*, et la courbe qui sera le lieu de l'extrémité de ces hauteurs sera la *ligne des résistances*.

L'équation différentielle de la ligne des résistances étant $dF = f dl$, il en résulte que la valeur de $f$, en un point quelconque, est égale à l'inclinaison de la tangente à la courbe en ce point.

108. Considérons toujours la même portion de courant, dont la longueur projetée sur l'horizontale soit représentée par AB (fig. 18), et désignée par $l$. Divisons cette longueur en un certain nombre de parties petites ou grandes qui pourraient être inégales, mais que, pour plus de simplicité, nous supposerons égales entre elles et que nous représenterons par $\Delta l$. Par chacun des points de division de la longueur $l$, élevons des perpendiculaires à AB qui seront des verticales équidistantes.

Désignons par $\omega_0$, $\omega_1$, $\omega_2$, etc., la série des sections qui dans le courant correspondent aux points de division;

Par $h^0$, $h'$, $h''$, etc., la hauteur de chacune de ces sections, lorsqu'elles sont verticales, ou leur projection sur la verticale quand les sections sont inclinées;

Par $h_0$, $h_1$, $h_2$, etc., la hauteur due à la vitesse moyenne qui correspond à chaque section; par $z_0$,

$z_1$, $z_2$, etc., la distance verticale du centre de gravité de chaque section au niveau de l'eau.

Remarquons maintenant que le profil longitudinal de tout courant, dont le mouvement n'est pas uniforme à pente constante, présente ordinairement deux lignes courbes ou à pentes variées, l'une de ces lignes correspond au fond et l'autre à la surface. Occupons-nous d'abord de ces lignes; pour cela, représentons par H' la pente absolue du fond, par $\Delta H^{\circ}$, $\Delta H'$, $\Delta H''$, etc., la série des pentes du fond comprises entre deux verticales consécutives, par $i^{\circ}$, $i'$, $i''$, etc, les pentes relatives qui correspondent aux points d'intersection de la ligne du fond avec les verticales équidistantes. Lorsque la ligne du fond sera une courbe continue, son équation différentielle sera $dH' = idl$.

Représentons encore par H la pente absolue de l'axe hydraulique, par $\Delta H_0$, $\Delta H_1$, $\Delta H_2$, etc., la série des pentes absolues du même axe, comprises entre deux verticales consécutives, par $I_0$, $I_1$, $I_2$, etc., les pentes relatives qui correspondent aux points d'intersection de l'axe hydraulique avec les verticales équidistantes. L'équation différentielle de l'axe hydraulique sera $dH = Idl$.

Si nous concevons le rectangle dont la hauteur $AA^n$ est égale à $H' + h^{\circ}$, il donnera évidemment $H' + h^{\circ} = H + h^n$, d'où $H = H' - (h^n - h^{\circ})$; et pour la pente absolue d'une partie de l'axe hydraulique comprise entre deux verticales équidistantes

$$\Delta H = \Delta H' - \Delta h' \ldots,$$

et en passant des différences aux différentielles

$$dH = dH' - dh' \ldots \quad (2).$$

Maintenant, si sur chacune des verticales équidistantes et au-dessus de la ligne de superficie que nous appelons axe hydraulique, nous rapportons les hauteurs dues aux vitesses, nous obtiendrons une suite de points qui appartiendront tous à la ligne des résistances dont nous avons représenté la pente absolue par F et dont $f_0$, $f_1$, $f_2$, etc., sont les pentes relatives qui correspondent aux points d'intersection de cette ligne par les verticales équidistantes; en effet, pour tous ces points, on aura

$$H + h_0 = F + h_n, \text{ ou } \Delta H = \Delta F + \Delta h,$$

ou encore $dH = dF + dh$, équation qui n'est autre que l'équation (1) trouvée ci-dessus, dans laquelle $dF = fdl$.

Si nous considérons le rectangle AC, dont le côté AE est égal à $H' + h^0 + h_0$, il donnera évidemment :

$$H' + h^0 + h_0 = F + h^n + h_n, \text{ ou } H' - F = h^n + h_n - (h^0 + h_0),$$

ou encore $\Delta H' - \Delta F = \Delta h^0 + \Delta h_0$, et enfin en passant des différences aux différentielles

$$dH' - dF = dh^0 - dh_0 = (i - f)dl,$$

cette dernière relation est une conséquence des équations (1) et (2).

Si sur les verticales équidistantes et au-dessous de l'axe hydraulique, nous rapportons les hauteurs $z_0$,

$z_1$, $z_2$, etc., du centre de gravité des sections, nous obtiendrons une suite de points qui appartiendront à la ligne des centres, ou à la courbe décrite par le centre de gravité de la massse en mouvement.

Si nous appelons E, la pente absolue de la ligne des centres; $e^o$, $e'$, $e''$, etc., ses pentes relatives, l'équation différentielle de cette ligne sera $dE = edl$, et le rectangle dont la hauteur serait $E + z_o$, donnerait évidemment $E + z_o = H + z_n$, ou $\Delta H = \Delta E - \Delta z$, ou encore $dH = dE - dz$.... (3).

Le rectangle AC, construit sur la base $AB = l$, et sur la hauteur $AE = H' + h^o + h_o$, nous donne donc les trois équations,

$$\Delta H = \Delta F + \Delta h \ldots. \ (1),$$
$$\Delta H = \Delta H' - \Delta h' \ldots. \ (2),$$
$$\Delta H = \Delta E - \Delta z \ldots. \ (3);$$

La combinaison des deux premières donne ensuite

$$\Delta H' - \Delta F = \Delta h' + \Delta h;$$

La combinaison des deux dernières,

$$\Delta H' - \Delta E = \Delta h' - \Delta z;$$

Enfin la combinaison de la première avec la dernière, $\Delta E - \Delta F = \Delta h + \Delta z$.

Lorsque des différences on passe aux différentielles, on obtient les dix équations suivantes :

$$dH = fdl + dh \ldots. \ (1),$$
$$dH = idl - dh' \ldots. \ (2),$$
$$dH = edl - dz \ldots. \ (3),$$

$$(i-f)dl=dh+dh',$$
$$(i-e)dl=dh'+dz,$$
$$(e-f)dl=dh+dz,$$
$$dH=Idl,$$
$$dH'=idl,$$
$$dE=edl,$$
$$dF=fdl.$$

Sur ces dix équations les trois premières sont seules nécessaires, puisque les trois suivantes en sont des conséquences, et que les quatre dernières sont des expressions différentielles ou de simples désignations.

Nous allons d'abord nous occuper des équations différentielles qui sont toutes d'une rigoureuse exactitude et nous en déduirons plusieurs conséquences importantes.

(2) Discussion des équations différentielles.

109. Les équations différentielles (1), (2), (3), donnent :

1° Pour la pente relative de l'axe hydraulique

$$I=f+\frac{dh}{dl}, \text{ ou } \frac{dh}{dl}=I-f;$$

2° Pour la pente relative du fond

$$i=I+\frac{dh'}{dl} \text{ ou } \frac{dh'}{dl}=i-I;$$

3° Pour la pente relative de la ligne des centres

$$e=I+\frac{dz}{dl} \text{ ou } \frac{dz}{dl}=e-I;$$

diverses combinaisons de ces résultats donnent ensuite :

$$\frac{dh'}{dh}=\frac{i-\mathrm{I}}{\mathrm{I}-f},\ \frac{dh'}{dz}=\frac{i-\mathrm{I}}{e-\mathrm{I}},\ \frac{dh}{dz}=\frac{\mathrm{I}-f}{e-\mathrm{I}},\ \frac{dh'-dh}{dl}=i+f-2\mathrm{I},$$

$$\frac{dh'-dz}{dl}=i-e,\ \frac{dh-dz}{dl}=2\mathrm{I}-(e+f).$$

Lorsque l'on peut négliger la résistance, ce qui revient à supposer $f=o$, on a : $d\mathrm{H}=dh=\mathrm{I}dl$, $d\mathrm{H}'=idl=dh+dh'$, $d\mathrm{E}=edl=dh+dz$.

Si l'un des éléments de l'axe hydraulique est horizontal, on a $d\mathrm{H}=$ ou $\mathrm{I}=o$, et par suite $fdl=-dh$, $idl=dh'$, $edl=dz$.

Si c'est la ligne du fond dont l'un des éléments soit horizontal, $d\mathrm{H}'$ ou $i=o$, ce qui donne $\mathrm{I}dl=-dh'$, $fdl=-(dh'+dh)$, $edl=-(dh'-dz)$.

Si l'un des éléments de la ligne des centres est horizontal, on a $d\mathrm{E}$ ou $e=o$, et par suite $\mathrm{I}dl=-dz$, $idl=dh'-dz$, $fdl=-(dz+dh)$.

Nous savons que les deux équations $d\mathrm{H}=idl-dh'$ et $d\mathrm{H}=fdl+dh$, nous donnent $\frac{dh'}{dl}=i-\mathrm{I}$, $\frac{dh}{dl}=\mathrm{I}-f$; mais de la relation $h\omega^2=\frac{\mathrm{Q}^2}{2g}$, on obtient

$$2hd\omega+\omega dh=o,$$

et, tant que la section reste verticale, $h'$ est égale à sa hauteur; on peut donc remplacer l'aire $\omega$ par $\mathrm{L}h'$, et $d\omega$ par $\mathrm{L}dh'$, tant que l'on peut admettre que la largeur moyenne ne varie pas sensiblement pour de légères variations de la hauteur; on obtient ainsi :

$$dh = -\frac{2h}{h'}dh' \text{ ou } \frac{dh'}{dl} = \frac{h'}{2h}(f - \mathrm{I});$$

cette valeur rapprochée de $\frac{dh'}{dl} = i - \mathrm{I}$ fait reconnaître que quand $h' = 2h$ on a nécessairement $i = f$, à moins que I ne soit infini, circonstance dans laquelle $\frac{dh'}{dl}$ et $\frac{dh}{dl}$ sont aussi infinis, et de signes contraires; mais lorsque I est infini on ne peut plus avoir $h' = 2h$, car, lorsque l'axe hydraulique approche de la verticale, la section qui lui est perpendiculaire est nécessairement inclinée et ne peut avoir $h'$ pour hauteur.

Nous venons de voir que $\frac{dh'}{dl} = i - \mathrm{I} = \frac{h'}{2h}(f - \mathrm{I})$, de là résulte la valeur de I qui est $\mathrm{I} = \frac{h'f - 2hi}{h' - 2h}$, valeur qui devient infinie avec $i$, qui est nulle lorsque $h'f = 2hi$, et indéterminée lorsque l'on a en même temps $h' = 2h$; par conséquent, l'axe hydraulique s'abaissera ou s'élevera verticalement toutes les fois que le fond présentera une chute ou un relèvement brusque; il sera horizontal lorsque l'on aura :

$$f = \frac{2hi}{h'} = \frac{a\chi h}{\mathrm{L}h'}, \text{ ou } \frac{\chi}{\mathrm{L}} = \frac{2i}{a};$$

enfin, il sera susceptible de prendre toutes les inclinaisons lorsque l'on aura $h' = 2h$ et $f = i$, d'où encore $\frac{\chi}{\mathrm{L}} = \frac{2i}{a}$.

110. Dans le mouvement uniforme à pente constante, la ligne décrite par le centre de gravité de la

masse en mouvement, étant parallèle au fond à l'axe hydraulique et à la ligne des résistances, on a constamment $I = e = i = f$, en sorte que l'une de ces quantités fait nécessairement connaître les autres; mais, lorsque le mouvement cesse d'être uniforme à pente constante, les pentes relatives I, $e$, $i$ et $f$ qui correspondent à une même section, forment quatre quantités distinctes qui ne peuvent plus être confondues; il faut donc se garder de faire usage de l'équation suivante, qui est adoptée par quelques hydrauliciens, $dH = Idl + dh$; en comparant cette équation avec celle n° 1, on reconnaît qu'elle ne peut être exacte que quand $I = f$; mais, lorsque cette condition est remplie, $dh = o$, c'est-à-dire que le mouvement est uniforme.

Après cette courte observation, reprenons les équations différentielles (1), (2) et (3), et remarquons que si l'on a en même temps $I = i = f$, il vient $dh = o$ et $dh' = o$, c'est-à-dire que la vitesse et la hauteur de la section sont constantes, le mouvement est donc uniforme, et comme l'axe hydraulique est parallèle au fond, il faut bien que le mouvement soit uniforme à pente constante.

Si l'on a en même temps $I = f = e$, il vient $dh = o$ et $dz = o$, c'est-à-dire que la vitesse est constante et que la ligne des centres est parallèle à l'axe hydraulique, le mouvement est donc uniforme; mais l'aire de la section étant constante et le centre de cette section restant à la même profondeur au-dessous de

l'axe hydraulique, il faut bien que la hauteur $h'$ soit constante, ce qui donne $dh' = o$, et par suite $I = i$; par conséquent, le mouvement est encore uniforme à pente constante.

Si l'on a $e = f = i$, il vient $dh' + dh = o$ et $dh + dz = o$, et par suite $dz = dh'$, mais cette dernière relation ne peut être satisfaite qu'autant que $dz = o$ et $dh' = o$, ce qui donne $dh = o$, le mouvement sera donc encore uniforme à pente constante.

Si l'on a constamment $I = f$, alors $dh = o$, c'est-à-dire que la vitesse est constante et le mouvement uniforme à pente variée. Dans ce mouvement, l'aire de la section est nécessairement constante et la variation de la pente est uniquement due à celle du périmètre de la section recouvert par l'eau.

Si l'on a constamment $I = e$, il vient $dz = o$, c'est-à-dire que la ligne des centres est parallèle à l'axe hydraulique.

Si l'on a constamment $I = i$, alors $dh' = o$, et l'axe hydraulique est parallèle à la ligne du fond.

Si l'on a $i = e$, $dz - dh' = o$, c'est-à-dire que la ligne des centres est constamment parallèle au fond.

Si l'on a $e = f$, il vient $dz + dh = o$, c'est-à-dire que la ligne des résistances est parallèle à celle des centres.

111. Il convient de faire observer que l'axe hydraulique d'un courant est susceptible de prendre accidentellement toutes les inclinaisons; car, un ou plusieurs des éléments de cet axe peuvent être horizon-

taux, et d'autres peuvent approcher de la verticale, comme cela a lieu pour une chute ou pour un relèvement; par conséquent, la quantité I est susceptible de prendre toutes les valeurs et même de changer de signe, comme cela résulte de ses diverses expressions générales qui sont

$$I = \frac{dH}{dl} = f + \frac{dh}{dl} = i - \frac{dh'}{dl} = e - \frac{dz}{dl} = \frac{fh' - 2hi}{h' - 2h};$$

lorsque l'axe hydraulique est horizontal on doit donc avoir $f = -\frac{dh}{dl}$, $i = \frac{dh'}{dl}$, $e = \frac{dz}{dl}$; lorsque cet axe est vertical, on doit avoir $I = \infty$ et $dl = o$.

Ce que nous venons de dire de l'axe hydraulique, ne peut s'appliquer à la ligne des résistances, car, dès qu'un liquide se meut dans un lit quelconque, la résistance commence à agir et ne peut jamais être négative; on ne peut concevoir, en effet, une résistance qui agisse dans le sens du mouvement; les différents éléments de la ligne des résistances baisseront donc sans cesse sans pouvoir se relever. La résistance peut quelquefois être assez petite pour être négligée, mais elle ne peut jamais être nulle; ainsi que cela résulte de l'expression $f = \frac{ah}{R}$. La ligne des résistances qui ne peut présenter aucune contre-pente, ne doit jamais avoir d'élément horizontal; en effet, pour que $f$ fût égal à zéro, il faudrait que l'on eût $\chi = o$, ce qui est impossible, ou $\omega = \infty$, ce qui ne peut avoir lieu que quand un courant verse ses eaux dans la mer. Cependant, on peut considérer $f$

comme nul, quand le lit est brusquement interrompu, comme cela arrive lorsque le liquide n'est plus soutenu par les parois et tombe librement dans l'air. En résumé, la ligne des résistances pourra avoir des points d'inflexion, mais n'aura jamais de points *maxima* et de points *minima* par rapport à l'horizontale.

Nous venons de voir que la ligne des résistances ne pouvait pas avoir d'élément horizontal, cette propriété est particulière à cette ligne et ne convient ni à l'axe hydraulique, ni à la ligne des centres, ni à celle du fond.

L'axe hydraulique aura toujours un de ses éléments horizontal toutes les fois que l'on aura :

$$\frac{dH}{dl} = f + \frac{dh}{dl} = i - \frac{dh'}{dl} = e - \frac{dz}{dl} = o,$$

conditions qui pourront toujours être remplies :

1° Lorsque $dh$ sera négatif ou lorsque la vitesse ira en diminuant;

2° Lorsque la hauteur de la section ira en augmentant;

3° Lorsque $e$ étant positif, la surface ira en se relevant.

Pour trouver la position d'un élément horizontal de l'axe hydraulique, il suffira donc de pouvoir résoudre, par rapport à cet élément, l'une des trois équations $f = -\frac{dh}{dl}$, $i = \frac{dh'}{dl}$, $e = \frac{dz}{dl}$, dont la première donne $f = \frac{2hi}{h'}$.

La ligne des centres aura l'un de ses éléments horizontal lorsque l'on aura :

$$e = \mathrm{I} + \frac{dz}{dl} = f + \frac{dz + dh}{dl} = o,$$

et encore $e = i - \left(\frac{dh' - dz}{dl}\right) = o$; pour trouver cet élément, il suffira de résoudre l'une des trois équations précédentes.

La ligne du fond aura l'un de ses éléments horizontal lorsque l'on aura

$$i = \mathrm{I} + \frac{dh'}{dl} = f + \frac{dh' + dh}{dl} = e + \frac{dh' - dz}{dl} = o,$$

et pour trouver la position de cet élément, il faudra résoudre l'une des trois équations précédentes.

112. Les équations (1), (2) et (3), lorsqu'on y joint la relation $f = \frac{a\chi h}{\omega}$... (4) et la relation $h\omega^2 = \frac{Q^2}{2g}$... (5), peuvent suffire pour résoudre toutes les questions que fait naître le mouvement permanent de l'eau dans les courants découverts; avant de prouver ce que nous venons d'avancer, nous nous arrêterons quelques instants sur la relation $\mathrm{R}f = ah$ et sur la relation $h\omega^2 = \frac{Q^2}{2g}$ qui résulte de la propriété fondamentale $u\omega = Q$ lorsqu'on y remplace $u$ par sa valeur $\sqrt{2gh}$.

La différentielle de cette dernière équation donne $2hd\omega + \omega dh = o$; si nous représentons par L la largeur moyenne de la section supposée constante pour des variations légères de $h'$ nous aurons $\omega = \mathrm{L}h'$ et

$h'$, et par suite $2hdh' + h'dh = o$. Cette équa-
ra donc lieu pour les variations de hauteur et
tesse de chacune des sections d'un courant per-
nent, lorsque la largeur moyenne de ces sections
pourra être considérée comme constante ; elle aura
lieu à plus forte raison pour chaque section rectan-
gulaire prise isolément, et pour toutes les sections
d'un courant permanent dont le lit serait rectangu-
laire à largeur constante.

Cette même équation donne $h' = 2h$ lorsque l'on
a $dh' + dh = o$, c'est-à-dire que, dans cette circon-
stance, la hauteur due à la vitesse moyenne est égale
à la moitié de la hauteur de la section.

Cherchons à reconnaître comment cette circon-
stance peut se produire et quelle en est la véritable
signification.

Lorsque l'on a $dh + dh' = o$, on a nécessairement
$h + h' = c$, $c$ étant une certaine constante à moins
que $h + h'$ ne soit un maximum ou un minimum, ou
encore que $h$ soit un maximum et $h'$ un minimum.

Lorsque $h + h' = c$, la hauteur due à la vitesse et
la hauteur de la section forment une somme con-
stante, c'est-à-dire que la ligne des résistances est pa-
rallèle au fond.

On réalise parfaitement cette condition, lorsqu'on
se représente un étang ou un réservoir maintenu à
un niveau constant, dont on fait couler un certain
volume d'eau par un vannage évasé à largeur con-
stante et dont le seuil est fixé d'une manière invariable

à une profondeur $c$ au-dessous du niveau de l'étang; en effet, si le vannage est suivi d'un canal dont le niveau soit maintenu au niveau du bord inférieur de la vanne, la hauteur $h$ due à la vitesse sera précisément égale à $c-h'$, $h'$ étant ici la hauteur dont la vanne est levée.

Le débit Q qui aura lieu par ce vannage, variera avec l'ouverture de la vanne et à un instant donné, il sera donc égal à $Lh'\sqrt{2gh}$, c'est-à-dire que l'on aura $hh'^2=\frac{Q^2}{2gL^2}$. La largeur L de la vanne étant constante, le débit Q sera le plus grand possible lorsque l'on aura $2hdh'+h'dh=o$, comme on a de plus $h+h'=c$, ou $dh+dh'=o$, il viendra $h'=2h$, d'où $h=\frac{1}{3}c$, $h'=\frac{2}{3}c$, ou $c=\frac{3}{2}h$, c'est-à-dire que le débit du vannage sera le plus grand possible lorsque la hauteur de l'ouverture de la vanne sera égale aux deux tiers de la distance qui sépare le niveau de l'eau du seuil de la vanne.

Il résulte de ce qui précède que quand le niveau de l'eau à l'amont d'un vannage reste constant, le débit, qui sort sans déverser par l'ouverture de la vanne, sera le plus grand possible lorsque la hauteur de cette ouverture sera égale au tiers de la distance verticale qui sépare le niveau de l'eau du seuil du vannage.

Lorsqu'au lieu du débit qui peut avoir lieu par un vannage, on considère un courant permanent, alors la quantité Q est nécessairement constante, et comme

on a toujours $hh'^2 = \frac{Q^2}{2gL^2}$, le produit $hh'^2$ n'est susceptible de varier que par la grandeur de la quantité L, le maximum de ce produit correspondra à la plus petite valeur de L ou à la plus petite largeur qu'il convient de donner à la section pour que le débit $\frac{Q}{L}$, par mètre courant de cette largeur, soit le plus grand possible. Si donc, dans la section d'un courant, on a $h + h' = c$, il viendra $\frac{Q}{L} = \sqrt{\frac{8}{27}gc^3} = \sqrt{gh'^3}$, et la largeur à donner à la section, pour que la condition du maximum soit remplie, sera $L = \frac{Q}{\sqrt{gh'^3}}$.

Si la largeur L était donnée, et si l'on était maître de régler la hauteur de la section de manière que le débit, par mètre courant de section, fût le plus grand possible, on aurait pour déterminer cette hauteur $h' = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{gL^2}}$.

Lorsque le débit Q et la largeur L sont constants, on a encore, pour chacune des sections, $2hdh' + h'dh = o$, mais ici il convient de faire observer que l'on ne peut avoir $dh' + dh = o$ que dans quatre circonstances :

1° Lorsque l'on a séparément $dh = o$ et $dh' = o$, ou $h = constante$ et $h' = constante$ ;

2° Lorsque $dh + dh' = o$, ou $h + h' = constante$ ;

3° Lorsque $h' + h$ est un *maximum* ou un *minimum* ;

4° Lorsque $h$ est un *maximum* et que $h'$ est nul.

Si la section n'était pas rectangulaire la relation $2hdh' + h'dh = o$, serait remplacée par

$$2hd\omega + \omega dh = o;$$

mais L étant la largeur moyenne de la section, largeur sensiblement constante pour de faibles variations de $h'$, on aura $d\omega = Ldh'$, et dans le cas particulier ou $dh' + dh = o$, il viendra $2hL = \omega$, ou $h = \frac{\omega}{2L}$; or $\frac{\omega}{L}$ étant la hauteur $h'$ de la section, il en résulte que la hauteur due à la vitesse est encore égale à la moitié de la hauteur de la section, ou que l'on a encore $h' = 2h$.

En résumé partout où l'on aura $h' = 2h$, le débit, par mètre courant de largeur, sera le plus grand possible, et lorsqu'un courant jouira de cette propriété sur toute son étendue, son débit, pour une même pente absolue, sera constamment le plus grand possible par mètre courant de largeur.

Avant de terminer tout ce qui a rapport aux variations des hauteurs $h$ et $h'$ relatives à une même section, nous devons faire observer que si l'on avait $\Delta h' + \Delta h = o$, cela équivaudrait à

$$h' + h' - (h^o + h^o) = o;$$

il faudrait dans ce cas se garder de conclure que $h' = 2h$, comme cela a généralement lieu lorsque la somme des différentielles $dh' + dh$ est nulle; cela est trop facile à concevoir pour qu'il soit utile de s'arrêter plus longuement sur cette observation.

Passons maintenant à l'examen de la relation

$Rf = ah$, qui donne, en chaque point, l'inclinaison de la tangente à la ligne des résistances, et qui devient l'équation différentielle de cette ligne lorsqu'on remplace $f$ par sa valeur $\frac{dF}{dl}$.

113. La relation $Rf = ah$ fait reconnaître que tous les courants dont le produit $Rf$ est constant, sont animés de la même vitesse, alors $dh = o$, et $f = I$; la constance du produit $Rf$ ou RI est ainsi le caractère des courants permanents à mouvement uniforme et à pente constante ou variable.

Si le mouvement est uniforme, la vitesse est nécessairement constante et par conséquent la section, ainsi que le produit RI; comme on a dans cette circonstance $RI = \omega \times \frac{I}{\chi}$, il en résulte que dans chaque courant à mouvement uniforme et à pente variée le rapport $\frac{I}{\chi}$ est constant, c'est-à-dire que la pente varie proportionnellement au contour de la section.

L'équation $f = \frac{ah}{R}$ fait reconnaître que tous les courants pour lesquels le rapport $\frac{h}{R}$ est constant, ont une ligne des résistances dont la pente est constante. La constance du rapport $\frac{h}{R}$ est donc le caractère des courants dont la résistance est constante.

Pour un courant déterminé $h = \frac{Q^2}{2g\omega^2}$ et $R = \frac{\omega}{\chi}$, il en résulte que $\frac{h}{R} = \frac{Q^2}{2g} \times \frac{\chi}{\omega^3}$, la constance du rapport $\frac{h}{R}$

entraîne donc celle du rapport $\frac{\chi}{\omega^3}$; par conséquent dans les courants permanents dont la résistance est constante, le contour de la section varie proportionnellement au cube de sa surface.

Lorsque l'on a $h=R$, il vient $f=a$, c'est-à-dire que le coefficient $a$ est égal à la pente qu'affecte la ligne des résistances, dans tout courant dont la hauteur due à la vitesse est égale au rayon moyen. Lorsque $\frac{h}{R}=a$, il vient $f=a^2$, c'est-à-dire que dans cette circonstance, la pente de la ligne des résistances est égale au carré de $a$.

Lorsque le rapport $\frac{\omega^3}{\chi}$ est constant et égal à $b$, on a $\omega^3=b\chi$, d'où en prenant les logarithmes

$$3log\omega=logb+log\chi,$$

La différentiation donné ensuite

$$\frac{3d\omega}{\omega}=\frac{d\chi}{\chi} \text{ ou } \frac{3d\omega}{d\chi}=\frac{\omega}{\chi},$$

mais $x$ et $y$ étant les coordonnées du contour de la section on a $d\omega=xdy$ et $d\chi=\sqrt{dx^2+dy^2}$; quant au rapport $\frac{\omega}{\chi}$ il est égal au rayon moyen R, la courbe pour laquelle $\frac{\omega^3}{\chi}$ est constant est donc telle que l'on a $R=\frac{3xdy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}=\frac{3x}{\sqrt{1+\frac{dx^2}{dy^2}}}$; mais $\alpha$ étant l'angle de

la tangente à la courbe, avec la verticale, on a

$$\frac{dx}{dy}=tang\alpha, \text{ et } cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+tang^2\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{dx^2}{dy^2}}},$$

on a donc $Rcos\alpha=3x$, propriété caractéristique de la courbe qui est telle que le rapport $\frac{\omega^3}{\chi}$ est constant.

On est souvent porté à se demander si l'axe hydraulique d'un courant dont le mouvement n'est pas uniforme, peut avoir un pente constante ; il nous semble en ce moment facile de répondre à cette question ; en effet, l'équation différentielle (1) donne $Idl=dF+dh$, lorsque I est constant, il vient $Il=F+h$; par conséquent pour que la pente d'un courant soit constante il suffit que la hauteur $F+h$ varie proportionnellement à la longueur, condition à laquelle il est souvent possible de satisfaire. Nous savons, par exemple, que $F=a\int\frac{hdl}{R}$; dans le cas particulier où le rapport $\frac{h}{R}$ est constant et égal à $b$, il vient $F=abl$, et par suite $h=(I-ab)l$; c'est-à-dire que lorsque la ligne des résistances a une pente constante, pour que l'axe hydraulique ait également une pente constante, il suffit que la hauteur due à la vitesse varie proportionnellement à la longueur.

La relation $I=\frac{fh'-2hi}{h'-2h}$ fait d'ailleurs reconnaître que tous les points d'un même courant, ou de courants différents pour lesquels le rapport $\frac{fh'-2hi}{h'-2h}$

sera constant, auront la même pente relative ; cette pente sera constamment nulle lorsque l'on aura $F=i$, ou plus généralement $Fh'=2hi$, sans avoir $h'=2h$.

L'équation $R=\frac{ah}{f}$ fait encore reconnaître que dans les courants dont le rayon moyen est constant, la pente de la ligne des résistances varie proportionnellement à la hauteur due à la vitesse; la constance du rapport $\frac{h}{f}$, ou du produit $f\omega^2$, est donc le caractère des courants à rayon moyen constant. Si le rayon moyen pouvait être égal à $a$, la pente de la ligne des résistances serait égale à la hauteur due à la vitesse.

Nous devons maintenant faire observer que la relation $f=\frac{ah}{R}$ que l'on a obtenue d'une manière empirique, ou par des considérations physiques combinées avec des résultats d'expérience et qui n'est pas logiquement déduite des lois de la mécanique, n'est applicable que pour des pentes et des vitesses comprises entre les limites de celles qui ont servi aux expériences et qu'elle peut cesser d'être exacte lorsque l'on sort de ces limites.

Il faut donc n'user avec confiance de la relation $f=\frac{ah}{R}$ que pour des vitesses comprises entre $0^m.15$ et $3^m.00$, et pour des pentes comprises entre 0.00006 et 0.01965 qui sont les limites de celles qui ont servi à déterminer $a$; lorsque l'on sort de ces limites, il

faut se rappeler que la vraie valeur de $f$ est

$$I-\frac{dh}{dl}=i-\left(\frac{dh'+dh}{dl}\right)=e-\left(\frac{dz+dh}{dl}\right).$$

114. Nous avons parlé, dans le numéro précédent, d'un courant dont toutes les sections variables de grandeur, auraient un rayon moyen constant; cherchons à reconnaître la forme que devraient avoir les sections pour que cette condition fût remplie.

Soient $x$ et $y$ les coordonnées horizontale et verticale de la courbe formant le contour de la section, $r$ le rayon de moyen; comme ce rayon doit être constant on doit avoir en chaque point $\frac{\omega}{\chi}=r$, ou $\omega=r\chi$; mais on sait que $\omega=\int xdy$, par conséquent $xdy=rd\chi$, on sait encore que $d\chi=\sqrt{dx^2+dy^2}$, on a donc pour l'équation différentielle de la courbe cherchée $xdy=r\sqrt{dx^2+dy^2}$, ou $\frac{dy}{r}=\frac{dx}{\sqrt{x^2-r^2}}$ et en intégrant $\frac{y}{r}=l(x+\sqrt{x^2-r^2})+C$.

Pour déterminer la constante, il faut remarquer que la plus petite valeur de $x$ est $x=r$; car pour une valeur plus petite, $\sqrt{x^2-r^2}$ serait une quantité imaginaire; si donc $y$ doit être nul, lorsque $x=r$, il faut que l'on ait $c=-lr$. La courbe qui jouit de la propriété énoncée a donc pour équation

$$\frac{y}{r}=l\left(\frac{x}{r}+\sqrt{\frac{x^2}{r^2}-1}\right),$$

qui convient à une logarithmique.

L'équation que nous venons de trouver peut avoir

une forme plus simple, car si des logarithmes on passe aux nombres, on aura $e^{\frac{y}{r}}=\frac{x}{r}+\sqrt{\frac{x^2}{r^2}-1}$, $e$ étant la base des logarithmes népériens; si l'on fait disparaître le radical on obtiendra $\frac{x}{r}=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{y}{r}}+e^{\frac{-y}{r}}\right)$.

Chaque section se composera d'un plafond égal à $2r$, et de deux portions de courbes placées symétriquement à droite et à gauche de l'axe; la section ainsi formée est telle que sa largeur augmente dans un bien plus grand rapport que sa hauteur: on vérifie d'ailleurs facilement que la courbe satisfait à la propriété énoncée; mais c'est assez s'arrêter sur une recherche plus curieuse qu'utile.

115. Si dans l'équation $h\omega^2=\frac{Q^2}{2g}$, on remplace l'aire $\omega$ de la section par sa valeur $R\chi$, on aura $hR^2\chi^2=\frac{Q^2}{2g}$, d'où on tirera $R=\frac{Q}{\chi\sqrt{2gh}}$; cette valeur de R, substituée dans l'équation $Rf=ah$, donnera $Qf=\frac{a\chi}{2g}(2gh)^{\frac{3}{2}}$, relation très-simple entre le débit, la pente de la ligne des résistances, le contour de la section et la vitesse.

Si dans l'équation $Rf=ah$, on remplace $h$ par sa valeur $\frac{u^2}{2g}$, on obtiendra $u=\sqrt{\frac{2gRf}{a}}$, mais $u=\frac{Q}{\omega}$ par conséquent $Q=\omega\sqrt{\frac{2gRf}{a}}$, et en remplaçant $\omega$ par $Lh'$, on obtient $Q=\sqrt{\frac{2g}{a}}Lh'\sqrt{Rf}$; enfin lorsque l'on croit pouvoir substituer au rayon moyen R la hau-

teur $h'$ de la section et à l'inclinaison $f$ de la ligne des résistances, la pente I de la surface, on a

$$Q=\sqrt{\frac{2g}{a}}Lh'^{\frac{1}{2}}\sqrt{I},$$

équation qui est identique quant à la forme, avec celle dont les ingénieurs toscans font usage, pour calculer les débits du Pô.

Il nous est encore facile de déterminer la pente d'un courant à mouvement uniforme, qui sous la moindre pente absolue, conduira le plus grand volume d'eau avec le moins de résistance; en effet, nous savons que la section qui oppose le moins de résistance à l'écoulement de l'eau doit être telle que le rayon moyen R soit égal à la moitié de la hauteur de la section, c'est-à-dire que l'on doit avoir $R=\frac{h'}{2}$, ce qui change l'équation $RI=ah$ en $h'I=2ah$, relation qui convient à tous les courants dont le mouvement est uniforme et qui éprouvent le moins de résistance de la part de leur lit; mais pour que le débit de ce courant, sous la même pente absolue, soit le plus grand possible, par mètre courant de section, il faut de plus que l'on ait $h'=2h$, ce qui donne $I=a$.

Le courant à mouvement uniforme qui, sous la même pente absolue, conduira le plus d'eau avec le moins de résistance, doit donc avoir une pente constante égale à $a$ et un rayon moyen égal à la moitié de la hauteur de la section.

116. Parmi les relations que l'on obtient en com-

binant les équations (1), (2) et (3), nous nous occuperons principalement de la relation $(i-f)dl=dh+dh'$ qui résulte des équations (1) et (2); mais avant de déduire de cette relation plusieurs résultats intéressants nous entrerons dans quelques détails sur les causes accidentelles qui peuvent modifier la surface d'un courant. Nous ferons d'abord observer que l'expression de la propriété fondamentale des courants permanent $\omega u=Q$ nous apprend que toute cause qui tend à augmenter la vitesse moyenne, diminue nécessairement l'aire de la section.

Nous remarquerons ensuite que tout obstacle qui se trouve dans le lit d'un courant, en réduit la vitesse dans la partie située en amont; dans cette partie les sections augmentent de surface et par conséquent de hauteur, puisque leur forme ne change pas; la superficie ou l'axe hydraulique de ce courant se relève donc sur une certaine étendue.

Si, au contraire, le fond du lit d'un courant est interrompu, ou seulement s'il présente ce que l'on appelle un gouffre ou une chute, la vitesse moyenne des sections de la partie située en amont sera augmentée, la hauteur de ces sections diminuera, et la superficie ou l'axe hydraulique de ce courant s'abaissera sur une certaine étendue.

Il résulte de là que dans un courant dont le lit est régulier, ou dont la forme et la pente de la section sont constantes, le mouvement peut ne pas être uniforme et que sa superficie peut être tantôt au-dessus,

tantôt au-dessous de celle du régime uniforme; enfin que dans tout courant à lit irrégulier, la hauteur de la superficie ou la position de l'axe hydraulique dépend d'une certaine section, située vers l'aval, où le mouvement peut être accéléré ou retardé.

Pour faciliter ce que nous allons avoir à dire sur les modifications qu'éprouve la surface d'un courant par les accidents que le lit présente, nous appellerons relèvement de la surface ou simplement *relèvement*, tout effet produit par un obstacle qui en rétrécissant le passage oblige la surface à se relever dans la partie qui précède en amont, et l'étendue sur laquelle le relèvement est sensible sera l'amplitude du relèvement; les effets des barrages, des épis, des pertuis, des ponts, des îles, des digues longitudinales, et même celui du reflux de la mer, seront pour nous des *relèvements*.

Un gouffre, une chute dans le fond du lit, une prise d'eau, le creusement d'une passe, la destruction d'un obstacle, abaisseront la surface de l'eau dans la partie d'amont, et produiront ce que nous appellerons un *abaissement*.

La modification de la superficie d'un courant, que nous venons de proposer d'appeler *relèvement*, est souvent désignée par le mot *remou;* mais cette dénomination est impropre et peut faire confusion en donnant une idée fausse de l'objet que l'on a en vue; en effet un *remou* est une eau qui, près de l'un des bords d'une rivière, d'une île ou d'un obstacle

quelconque, tournoye sans avancer par suite de l'action du courant ou par toute autre cause.

On donne encore le nom de *remou* à toute masse d'eau qui se meut en tournoyant en sens contraire de la direction du courant ou du corps qui produit cet effet, comme cela a lieu lorsqu'un bateau remonte une rivière ; dans cette circonstance on voit une partie de l'eau d'abord entraînée, puis retenue par la pression et le frottement du bateau, s'échapper vers l'aval et perdre, par des tourbillonnements et des tournoyements successifs, la force vive qui lui avait été communiquée.

Le mot *remou*, ainsi que le fait judicieusement observer M. d'Aubuisson, ne paraît devoir s'appliquer qu'à des masses d'eau qui tournoyent sans avancer, ou a des masses d'eau qui rétrogradent en tournoyant; Dubuat en a donc trop étendu l'acception, en donnant ce nom à tout exhaussement de la surface d'un courant au-dessus de son niveau naturel.

La modification de la superficie que nous proposons d'appeler *abaissement* est quelquefois désignée par les mots *remou de dépression*, *remou d'abaissement*, dénomination que, d'après ce qui précède, l'on doir trouver impropre.

Nous ferons encore observer qu'il résulte de la relation $Rf = ah$, que dans tout courant la vitesse, qui dépend toujours de l'aire et de la forme de la section, dépend aussi de la pente $f$ de la ligne des résistances, en sorte que si cette pente éprouve un

changement brusque, la vitesse peut en éprouver une variation assez forte pour produire un relèvement ou un abaissement de la superficie du courant, relèvement ou abaissement qui est fort différent de celui qui est dû aux variations de la section, et qui se trouve toujours à l'aval du point où la pente a varié.

On doit donc distinguer deux sortes de relèvements et deux sortes d'abaissements ; ceux de la première sont dus aux variations de la section et précèdent toujours le point où la section a été modifiée ; ceux de la deuxième sorte sont dus à de brusques changements de pente, et suivent toujours le point où le changement a lieu.

117. Nous pouvons actuellement nous occuper de l'équation $(i-f)dl = dh' + dh$ ; sous cette forme, elle nous apprend que chaque fois que l'on aura $(i-f)dl = o$, il viendra nécessairement $dh' + dh = o$, et, par conséquent, $h' = 2h$, à moins que l'on ait séparément $dh' = o$ et $dh = o$, ou $h' =$ *constante* et $h =$ *constante*, ce qui indiquerait que le mouvement est parvenu à l'uniformité, soit que cette uniformité soit accidentelle ou permanente; ou, encore, à moins que, $h'$ étant nulle, $h$ ait alors une valeur maxima et réciproquement.

On aura d'ailleurs $(i-f)dl = o$, dans deux circonstances distinctes :

1° Lorsque $i = f$ ou lorsque l'un des éléments de la ligne des résistances est parallèle au fond ;

2° Lorsque $dl = o$ ou lorsque le fond présentera une chute ou un exhaussement brusque tel que celui produit par un barrage.

Lorsque cela a lieu, on a nécessairement $d\mathrm{H} = dh$, c'est-à-dire que l'augmentation de la hauteur due à la vitesse est précisément égale à l'augmentation de la pente absolue.

Nous savons que la ligne des résistances ne peut avoir d'élément horizontal; cependant, lorsque la résistance est très-faible, on se permet quelquefois de considérer $f$ comme nul, et, si de plus le fond est horizontal, on a en même temps $i = o$, $f = o$, et par suite $dh' + dh = o$ ou $h' = 2h$.

La quantité $dh' + dh$ étant la différentielle de $h' + h$ ou de la distance qui sépare le fond de la ligne des résistances, l'équation $(i - f)dl = dh' + dh$ serait toujours facilement intégrable; si l'on connaissait $f$ en fonction de $l$ ou de $h$, et en supposant que $i$ soit constant ou donné, on obtiendrait ainsi l'équation de la ligne des résistances lorsque l'on connaîtrait celle du fond.

118. L'équation $(i - f)dl = dh' + dh$ est susceptible de plusieurs transformations dont nous allons nous occuper afin d'en faciliter la discussion.

Le mouvement étant permanent, on a $h\omega^2 = c$, ou $2hd\omega + \omega dh = o$, et lorsque l'on désigne par L la largeur moyenne des sections, on a $\omega = \mathrm{L}h'$, $d\omega = \mathrm{L}dh'$ et $dh = \frac{-2h\mathrm{L}dh'}{\omega}$, ou encore $dh = \frac{-2hdh'}{h'}$, on a de

plus $f = \frac{a\chi h}{\omega} = \frac{a\chi h}{Lh'}$; substituant ces valeurs dans l'équation $(i - f)dl = dh' + dh$, on obtient facilement

$$(\omega i - a\chi h)dl = (\omega - 2hL)dh',$$

ou encore $h'(i - f)dl = (h' - 2h)dh'$, d'où on tire, pour la tangente de l'angle d'inclinaison de l'axe hydraulique sur une ligne parallèle au fond,

$$\frac{dh'}{dl} = \frac{\omega i - a\chi h}{\omega - 2hL} = (i - f)\frac{h'}{h' - 2h}.$$

Nous savons déjà que la tangente d'inclinaison de l'axe hydraulique sur l'horizontale a pour expression $I = \frac{fh' - 2hi}{h' - 2h}$.

Ces équations vont nous faire connaître les propriétés les plus importantes de l'axe hydraulique; remarquons d'abord que $\frac{dh'}{dl} = o$ lorsque l'on a $i = f$ ou $i = \frac{a\chi h}{\omega}$, mais alors l'axe hydraulique a l'un de ses éléments qui est accidentellement parallèle au fond; dans cette circonstance, on a $dh' = o$ et $dh = o$, et l'on ne doit pas en conclure, comme nous le savons déjà, que $h' = 2h$.

Lorsque l'axe hydraulique sera vertical on devra avoir $I = \infty$, ce qui exige que l'on ait $i = \infty$, c'est-à-dire que l'axe hydraulique ne pourra prendre une direction verticale que lorsque le fond s'élevera ou s'abaissera verticalement. La valeur de I deviendrait encore infinie si la valeur de $f$ pouvait l'être; mais cette quantité ayant pour expression $\frac{a\chi h}{Lh'} = \frac{aQ^2}{2g} \times \frac{\chi}{\omega^3}$,

sous cette forme, on reconnaît que $f$ ne peut devenir infini que quand $\omega$ est nul, ce qui ne peut pas être.

A la première vue, il semble que I sera infinie, toutes les fois qu'on aura $h' = 2h$; cela arrivera effectivement lorsque l'on aura $dl = o$ ou $i = \infty$; mais, lorsque $dl$ ne sera pas nul, $h' = 2h$ donnera $dh' + dh = o$, et par suite $f = i$; dans cette circonstance, on aura en même temps $\frac{dh'}{dl} = \frac{o}{o}$ et $I = \frac{o}{o}$, c'est-à-dire que la valeur de ces quantités sont indéterminées, et que l'équation de l'axe hydraulique est insuffisante pour en donner la valeur; c'est-à-dire que tous les courants, sous une infinité d'inclinaisons différentes, peuvent présenter des sections qui soient telles que $h' = 2h$.

Lorsque $dh'$ étant négatif, $\frac{dh'}{dl}$ et I pourront devenir infinis, on en conclura que l'axe hydraulique qui se rapproche du fond primitif suffisamment prolongé finit par le percer, ou que le liquide tombe verticalement par une ouverture ménagée dans le fond, car la section devant toujours être perpendiculaire à l'axe hydraulique, lorsque cet axe perce le fond perpendiculairement, il faut bien que la section soit dans la direction même de ce fond. Dans cette circonstance, on a bien $dh' + dh = o$, mais il ne faut pas en conclure que $h' = 2h$, car, dès que la section cesse d'être verticale, $h'$, qui ne cesse pas de l'être,

n'exprime plus la hauteur de la section, et, lorsque I est infini, $h' = o$ et $h$ a alors la valeur la plus grande qu'il puisse avoir tant que l'axe hydraulique est au-dessus du fond.

Lorsque $dh'$ étant positif, $\frac{dh'}{dl}$ et I pourront devenir infinis, alors l'axe hydraulique qui s'élève d'abord au-dessus du fond, finit par avoir une direction perpendiculaire au fond, ou à s'élever presque verticalement.

Nous venons de voir que l'axe hydraulique a l'un de ses éléments parallèle au fond, lorsque l'on a $\omega i = a\chi h$ ou $i = \frac{a\chi h}{\omega}$; mais il convient de faire observer que cela ne veut pas dire que le mouvement soit uniforme, ou seulement que la hauteur de la section soit celle du régime uniforme à pente constante, car $\frac{a\chi h}{\omega} = \frac{aQ^2}{2g} \times \frac{\chi}{\omega^3}$, et, sous cette forme, on reconnaît qu'il suffit que le rapport $\frac{\chi}{\omega^3}$ reste constant pour que la relation $i = \frac{a\chi h}{\omega}$ soit satisfaite; or, la constance du rapport $\frac{\chi}{\omega^3}$ est le caractère des courants dont la pente est constante, la hauteur de la section pourra donc être plus grande ou plus petite que celle du régime uniforme. $a\chi h$ étant en toute circonstance égal à $\omega f$, il en résulte que quand $\omega i = a\chi h$, on a nécessairement $i = f$, c'est-à-dire que la ligne des

résistances est en même temps parallèle au fond et à la surface.

Si l'on avait en même temps $i = f$ et $h' = 2h$, la ligne des résistances serait parallèle au fond, mais, pour l'axe hydraulique, on aurait $\frac{dh'}{dl} = \frac{o}{o}$, c'est-à-dire que l'inclinaison de ses éléments serait indéterminée et pourrait varier depuis la parallèle au fond jusqu'à sa perpendiculaire, comme cela a lieu lorsque l'eau se déverse en passant sur un barrage.

Si, pour un courant, la relation $h' = 2h$ est constamment satisfaite, on a alors $dh' + dh = o$, ce qui donne $f = i$, et comme $I = \frac{fh' - 2hi}{h' - 2h}$, on aura encore $I = i$, c'est-à-dire que le courant aura une pente constante et un mouvement uniforme; quant à la hauteur de la section, elle sera déterminée par la relation $h'^3 = \frac{Q^2}{gL^2}$, la valeur de $f$ est alors

$$f = \frac{a\chi h}{Lh'} = \frac{a}{2} \times \frac{\chi}{L}.$$

119. L'équation $dh' + dh = (i - f)dl$, lorsque le fond est horizontal ou lorsque l'on a $i = o$, se réduit à $dh' + dh = -fdl$, et donne $\frac{dh'}{dl} = \frac{-fh'}{h' - 2h} = \frac{-a\chi h}{\omega - 2hL}$.

Si, à l'entrée de l'eau dans le canal, la section est telle que $2h$ soit plus grand que $h'$, $dh'$ sera positif, et l'axe hydraulique s'élèvera au-dessus du fond et sera incliné en sens contraire du mouvement; mais $h'$ augmentant et $h$ diminuant dans un plus grand

rapport, on ne tardera pas à avoir $h' = 2h$, alors $\frac{dh'}{dl}$ devient infini positif, c'est-à-dire que l'axe hydraulique, à une faible distance de l'entrée de l'eau dans le canal, s'élevera verticalement.

Comme $\frac{dh'}{dl}$ ne peut devenir nul, à moins que $h$ ou $f$ ne le soit, ou que le liquide soit sans mouvement, ou qu'il se meuve sans résistance, il faut en conclure que, dans les circonstances ordinaires du mouvement d'un courant dans un lit horizontal, l'axe hydraulique ne peut avoir d'élément horizontal.

Si, après le point où le liquide s'élève verticalement au-dessus du fond, le courant conserve un mouvement de progression, comme $h'$ est alors plus grand que $2h$, $dh'$ devient négatif, $h'$ diminue donc et $h$ augmente, l'axe hydraulique se rapproche du fond, et l'on aura de nouveau $h' = 2h$, puis $\frac{dh'}{dl}$ deviendra infini négatif, c'est-à-dire que l'axe hydraulique finira par s'abaisser verticalement sur le fond, ou que le liquide tombera par une ouverture ménagée dans le fond.

Lorsque la section du lit est rectangulaire à largeur constante L, l'équation $dh' + dh = fdl$ est facilement intégrable; en effet, en désignant par $y$ les ordonnées verticales, par $x$ les abscisses, on a $dh' = dy$, $dl = dx$, $dh = \frac{-2hdy}{y}$, $h = \frac{Q^2}{2gL^2y^2}$, et

$f = \frac{aQ^2}{2L^3g} \times \frac{L+2y}{y^3}$, après les substitutions on a à intégrer l'équation suivante :

$$\frac{y^3dy}{L+2y} - \frac{Q^2}{gL^2} \times \frac{dy}{L+2y} = -\frac{aQ^2}{2gL^3}dx, \text{ or } \int \frac{dy}{L+2y} = \tfrac{1}{2}l(L+2y)$$

$$\text{et } \int \frac{y^3dy}{L+2y} = \tfrac{1}{96}(16y^3 - 12Ly^2 - 8L^2y + L^3) - \tfrac{8}{96}L^3l(L+2y),$$

par conséquent, l'équation de l'axe hydraulique est

$$16y^3 - 12Ly^2 + 8L^2y + L^3 = \left(\frac{48Q^2}{gL^2} + 6L^3\right)log(L+2y) - \frac{48Q^2}{gL^3}x + c;$$

pour déterminer la constante, on peut supposer à $y$ une valeur connue Y lorsque $x = o$, ce qui donne

$$16(Y^3 - y^3) - 12L(Y^2 - y^2) + 8L^2(Y - y) = \left(\frac{48Q^2}{gL^2} + 6L^3\right)log\left(\frac{L+2Y}{L+2y}\right) + \frac{48aQ^2}{gL^3}x;$$

nous aurons plus loin l'occasion de faire usage de cette équation.

Lorsque la largeur du courant est indéfinie, on a $h = \frac{e}{h'^2}$, $f = \frac{ah}{h'} = \frac{ae}{h'^3}$; l'équation différentielle de la courbe $(h' - 2h)\,dh' = fh'dl$ devient alors :

$$\left(h' - \frac{2e}{h'^2}\right)dh' = \frac{ae}{h'^2}dl,$$

dont l'intégrale est $\frac{h'^4}{4} - 2eh' = ael + c$, équation qui appartient à une parabole du quatrième degré.

120. Lorsque le lit du courant a une pente constante $i$ dans le sens du mouvement, on a toujours

$$\frac{dh'}{dl} = \frac{\omega i - a\chi h}{\omega - 2hL}, \text{ ou } \frac{dh'}{dl} = \frac{(i-f)h'}{h' - 2h} \text{ et } I = \frac{fh' - 2hi}{h' - 2h}.$$

Pour discuter ces équations, nous ferons observer que l'on peut avoir $\omega i$ plus grand ou plus petit que $a\chi h$, et $\omega$ plus grand ou plus petit que $2h\mathrm{L}$, nous aurons donc quatre circonstances à examiner.

Nous supposerons d'abord $\omega > 2h\mathrm{L}$, ce qui a généralement lieu dans les rivières et les fleuves, et $\omega i > a\chi h$. Dans cette circonstance, le numérateur et le dénominateur de la valeur de $\frac{dh'}{dl}$ étant positifs, il en résulte que $dh'$ l'est nécessairement, l'axe hydraulique s'élève donc sans cesse au-dessus du fond, il forme ainsi une courbe qui tourne sa convexité vers le fond ou sa concavité vers le haut. Cet axe pourra s'étendre depuis le point où il est parallèle au fond, ce qui donne $\frac{dh'}{dl} = o$, ou $\omega i = a\chi h$, ou encore $i = f$, jusqu'au point où il devient horizontal, ce qui donne $\frac{dh'}{dl} = i$, ou $2\mathrm{L}i = a\chi$, ou encore $2hi = fh'$.

Si, $\omega$ étant toujours plus grand que $2h\mathrm{L}$, $\omega i$ est constamment plus petit que $a\chi h$, alors $dh'$ est nécessairement négatif, et l'axe hydraulique s'abaisse depuis le point où il est parallèle au fond, ce qui donne $h' = 2h$ et $\frac{dh'}{dl} = -\frac{o}{o}$; cela indique que l'axe hydraulique s'approche sans cesse du fond, jusqu'en un point où l'inclinaison de l'axe hydraulique est indéterminée, ce qui indique que la pente $i$ ne peut rester constante et doit nécessairement varier, si cette

pente $i$ devient infinie, le liquide se déverse par une ouverture ménagée dans ce fond.

Supposons maintenant $2hL > \omega$, circonstance qui se présente rarement dans la pratique, mais que l'on peut faire naître à volonté dans des expériences faites à l'aide de canaux de faibles dimensions. Si l'on a en même temps $\omega i > a\chi h$, il viendra

$$\frac{dh'}{dl} = \frac{-(\omega i - a\chi h)}{2hL - \omega} = \frac{-(i-f)h'}{2h - h'},$$

$dh'$ sera donc négatif et l'axe hydraulique se rapprochera du fond; mais alors $\omega$ diminuant et $h$ augmentant on aura bientôt $\omega i = a\chi h$, ou $\frac{dh'}{dl} = o$, c'est-à-dire que l'un des éléments de l'axe hydraulique sera parallèle au fond, et en ce point la section aura la plus petite hauteur qu'elle puisse avoir. Après le point que nous venons d'indiquer, $a\chi h$ devenant plus grand que $\omega i$, $\frac{dh'}{dl}$ sera positif et l'axe hydraulique s'élevera au-dessus du fond, mais alors $\omega$ augmentera et $h$ diminuera dans un plus grand rapport, en sorte qu'à peu de distance de la plus petite section on aura $\omega = 2hL$ et $h' = 2h$, et comme $i$ ne peut être ici égal à $f$, on aura $dl = o$ et $\frac{dh'}{dl} = +\infty$, l'axe hydraulique se relevera donc dans une direction perpendiculaire au fond; après ce point $\omega$ devenant plus grand que $2hL$, $dh'$ sera de nouveau négatif et l'axe hydraulique se rapprochera du fond jusqu'au point où l'on aura $\frac{dh'}{dl} = o$, et où l'axe hydraulique sera redevenu paral-

lèle au fond ; à partir de ce dernier point, le mouvement pourra être uniforme, à moins qu'un obstacle ou une chute ne vienne s'opposer à cette uniformité. Entre les deux derniers points dont il vient d'être question, il peut en exister un troisième où la tangente soit horizontale, et dont la position se déterminera par la relation $2hi = h'f$, ou $2Li = \chi a$.

121. Lorsque la pente du lit est en sens contraire du mouvement, $i$ est négatif et la valeur de $\frac{dh'}{dl}$ devient $\frac{dh'}{dl} = -\frac{\omega i + \chi ah}{\omega - 2hL} = \frac{-(i-f)}{h'-2h} h'$, et si l'on suppose d'abord $\omega > 2hL$ ce qui est le cas ordinaire, alors $dh'$ est négatif et l'axe hydraulique se rapproche du fond; mais $\omega$ diminuant, $h$ augmente dans un plus grand rapport et l'on de tarde pas à avoir $\omega = 2hL$, ou $\frac{dh'}{dl} = -\infty$ ; c'est-à-dire que l'axe hydraulique devient perpendiculaire au fond et que le liquide se déverse par une chute ou par une ouverture ménagée dans ce fond. Comme $\frac{dh'}{dl}$ ne peut pas devenir nul, il en résulte que, dans la circonstance qui nous occupe, l'axe hydraulique ne peut avoir aucun de ses éléments parallèle au fond, et à plus forte raison aucun de ses éléments ne peut être horizontal.

Lorsque $\omega$ est plus petit que $2hL$ on a

$$\frac{dh'}{dl} = \frac{\omega i + \chi ah}{2hL - \omega} = \frac{(i+f)h'}{2h - h'},$$

$dh'$ est alors positif et l'axe hydraulique tend d'abord

à s'écarter du fond ; mais, la valeur de $\omega$ augmentant et celle de $h$ diminuant dans un plus grand rapport, on ne tarde pas à avoir $\omega = 2hL$ et $\frac{dh'}{dl} = \infty$, c'est-à-dire que l'axe se relève brusquement dans une direction perpendiculaire au fond ; il est d'ailleurs évident qu'aucun des éléments de l'axe hydraulique ne peut être horizontal ni parallèle au fond.

Après le point où $\frac{dh'}{dl}$ est infini positif, $\omega$ peut devenir plus grand que $2hL$ et $dh'$ devient négatif, alors si le mouvement se continue, l'axe hydraulique se rapproche du fond, et comme $\omega$ diminue et que $h$ augmente dans un plus grand rapport, on ne tarde pas à avoir de nouveau $\omega = 2hL$; $\frac{dh'}{dl}$ devenant infini négatif, il en résulte que l'axe hydraulique s'abaisse dans une direction perpendiculaire au fond ou que le liquide se verse par une ouverture ou une chute ménagée dans le fond.

122. Nous allons chercher à reconnaître les principales circonstances dans lesquelles il est possible d'intégrer l'équation $dh' + dh = (i - f)\,dl$. Remarquons d'abord que $k\omega^2 = \frac{Q^2}{2g}$, la quantité $\frac{Q^2}{2g}$ étant constante ; pour plus de simplicité nous la représenterons par $e$, ce qui donne $h = \frac{e}{\omega^2}$ et $dh = \frac{-2e\,d\omega}{\omega^3}$, nous avons ensuite $f = \frac{ah\chi}{\omega} = \frac{ae\chi}{\omega^3}$; et si nous désignons par L la largeur moyenne d'une section quel-

conque, nous aurons encore, en supposant que la largeur L ne varie pas sensiblement pour de faibles variations de la hauteur $h'$ de la section, $dh' = \frac{d\omega}{L}$, la substitution de ces diverses quantités donnera

$$\frac{\omega^3 - 2eL}{(\omega^3 i - ae\chi)L} \times d\omega = dl, \text{ ou encore } \frac{\frac{\omega^3 i}{ae\chi} - \frac{2Li}{\chi a}}{\frac{\omega^3 i}{ae\chi} - 1} \times d\omega = iLdl;$$

équation dont l'intégration ne peut être possible, quand la pente est variable, qu'autant que l'on connaît $i$, L et $\chi$ en fonction de $\omega$; mais lorsque l'on suppose $i$ constant la question se simplifie; en effet, si nous désignons par $\Omega$ et X l'aire et le contour de la section du courant qui sous la pente $i$ débiterait le même volume Q, d'un mouvement uniforme, nous aurons $i = \frac{ae\mathrm{X}}{\Omega^3}$, ou $\frac{i}{ae} = \frac{\mathrm{X}}{\Omega^3}$, la substitution donnera :

$$\frac{\frac{\omega^3 \mathrm{X}}{\Omega^3 \chi} - \frac{2Li}{\chi a}}{\frac{\omega^3 \mathrm{X}}{\Omega^3 \chi} - 1} d\omega = iLdl,$$

équation dont l'intégration sera moins difficile si l'on connaît $\chi$ en fonction de $\omega$, et si l'on peut regarder comme constant le rapport $\frac{L}{\chi}$, ce qui est suffisamment exact pour les cas ordinaires de pratique.

Dans le cas particulier où la section a une grande largeur qui est alors sensiblement égale au contour, c'est-à-dire lorsque l'on peut poser $\chi = \mathrm{X} = \mathrm{L} =$ *cons-*

*tante*, on a $\dfrac{\dfrac{\omega^3}{\Omega^3}-\dfrac{2i}{a}}{\dfrac{\omega^3}{\Omega^3}-1}\,d\omega = iLdl$, ou encore

$$\frac{iL}{\Omega}\,dl = d\frac{\omega}{\Omega} - \left(\frac{2i-a}{a}\right)\frac{\dfrac{d\omega}{\Omega}}{\dfrac{\omega^3}{\Omega^3}-1},$$

dont l'intégration donne :

$$\frac{iL}{\Omega}\,l = \frac{\omega}{\Omega} + \left(\frac{2i-a}{a}\right)\times\left(\frac{\Omega^2}{2\omega^2}+\frac{\Omega^5}{5\omega^5}+\text{etc.}\right)+c.$$

Si A est la valeur de $\omega$ lorsque $l=o$, on aura pour déterminer la constante arbitraire

$$o = \frac{A}{\Omega} + \left(\frac{2i-a}{a}\right)\cdot\left(\frac{\Omega^2}{2A^2}+\frac{\Omega^5}{5A^5}+\text{etc.}\right)+c,$$

enfin $\dfrac{iL}{\Omega}l = \dfrac{\omega-A}{\Omega} + \left(\dfrac{2i-a}{a}\right)\left(\dfrac{\Omega^2}{2}\left[\dfrac{A^2-\omega^2}{A^2\omega^2}\right]+\dfrac{\Omega^5}{5}\left[\dfrac{A^5-\omega^5}{A^5\omega^5}\right]+\text{etc.}\right)$

Cette série étant très-convergente, on pourra fréquemment se contenter des deux premiers termes qui donneront $\dfrac{iLl}{\Omega} = \left(\dfrac{\omega-A}{\Omega}\right)\left(1-\left[\dfrac{2i-a}{a}\right]\left[\dfrac{A+\omega}{2}\right]\dfrac{\Omega^3}{A^2\omega^2}\right)$.

Il convient de faire remarquer que quand $2i=a$ ou que $i=\dfrac{a}{2}$, il vient $iLl=\omega-A$, mais $\omega=Lh'$, $A=Lh^\circ$, on a donc $l=\dfrac{h'-h^\circ}{i}$, c'est-à-dire que l'axe hydraulique est dans cette circonstance une ligne droite horizontale, et que quand il s'agit d'un relèvement, son amplitude est alors égale à l'amplitude hydrostatique.

Quand $2i$ est plus petit que $a$, le second terme de

la valeur de $iLl$ étant positif, il en résulte que la valeur de $l$ est plus grande que l'amplitude hydrostatique.

Quand $2i$ est plus grand que $a$ le second terme de la valeur $iLl$ restant négatif, il en résulte que la valeur de $l$ est plus petite que l'amplitude hydrostatique.

Lorsque $i$ est négatif ou lorsque la pente est en sens contraire du mouvement, le second terme étant essentiellement positif et ne pouvant pas devenir négatif, il en résulte que la valeur de $l$ sera toujours plus grande que l'amplitude hydrostatique.

Nous savons que les valeurs du rayon moyen sont toujours comprises entre la hauteur $h'$ de la section et la moitié de la hauteur de cette section, car si la section a une grande largeur, le contour ne diffère pas sensiblement de cette largeur, c'est-à-dire que dans cette circonstance on a $L=\chi$, et par suite $\frac{\omega}{\chi}=h'$.

Si l'aire de la section est la plus grande possible par rapport au périmètre, alors $\frac{\omega}{\chi}=\frac{h'}{2}$ et $L=\frac{\chi}{2}$. Nous allons chercher comment se transforme l'équation de l'axe hydraulique dans chacune de ces circonstances. Lorsque $\frac{\omega}{\chi}=h'$, comme on a $f=\frac{ah}{h'}=\frac{ae}{h'^2}$, si l'on représente par $b$ la hauteur de la section du régime uniforme on aura $\frac{\omega^3\chi}{\Omega^2\chi}=\frac{L^4h'^2}{b^3L^4}=\frac{h'^2}{b^3}$, car $\frac{L}{\chi}=1$, et

par suite $\dfrac{\dfrac{h'^3}{b^3}-\dfrac{2i}{a}}{\dfrac{h^3}{b^3}-1}dh'=idl$; en sorte que l'intégration donne comme ci-dessus

$$\frac{il}{b}=\left(\frac{h'-h^0}{b}\right)\left(1-\left[\frac{2i-a}{a}\right]\left[\frac{h'+h^0}{2}\right]\frac{b^3}{h'^2h^{02}}\right).$$

Lorsque $\frac{\omega}{\chi}=\frac{h'}{2}$, comme on a $f=\frac{2ah}{h'}=\frac{2ae}{L^2h'^3}$, l'équation différentielle de l'axe hydraulique deviendra $dl=\frac{L^2h'^3-2e}{L^2h'^3i-2ae}dh'$. Si l'on représente par $n$ la largeur moyenne de la section du régime uniforme, sa hauteur étant toujours $b$, on aura $i=\frac{2ae}{n^2b^3}$, ou $2ae=in^2b^3$, ce qui donne $idl=\dfrac{\dfrac{L^2h'^3}{n^2b^3}-\dfrac{i}{a}}{\dfrac{L^2h'^3}{n^2b^3}-1}dh'$, équation qui ne sera intégrable que quand on pourra considérer le rapport $\frac{L^2}{n^2}$ comme constant, en représentant ce rapport par $\alpha^3$, on ne tarde pas à obtenir pour l'intégrale cherchée :

$$\frac{\alpha il}{b}=\frac{\alpha(h'-h^0)}{b}\left(1-\frac{i-a}{a}\left[\frac{h'+h^0}{2}\right]\frac{b^3}{\alpha^3h'^2h^{02}}\right).$$

Nous trouvons que, dans cette circonstance, l'axe hydraulique sera horizontal lorsque l'on aura $i=a$, et que, quand il s'agira d'un relèvement, son amplitude sera précisément égale à l'amplitude hydrostatique.

Quand $i$ sera plus petit que $a$, le second terme de la valeur de $l$ étant positif, l'amplitude du relèvement sera plus grande que l'amplitude hydrostatique.

Quand $i$ sera plus grand que $a$, le second terme de la valeur de $l$ restant négatif, l'amplitude du relèvement sera plus petit que l'amplitude hydrostatique.

Mais, c'est assez nous arrêter sur ces résultats qui donnent les moyens d'apprécier l'influence que la pente et la forme de la section exercent sur l'amplitude des relèvements ; nous ferons d'ailleurs remarquer que cette amplitude est totalement indépendante du débit, et qu'elle reste constamment la même pour des courants dont les lits ont une pente égale et constante, pourvu que la largeur moyenne des sections soit dans un rapport sensiblement constant avec la largeur moyenne du régime uniforme.

Nous ferons encore observer que l'influence exercée par la forme des sections est assez considérable pour faire varier à peu près du simple au double, le second terme de la valeur de l'amplitude, et que c'est à tort que l'on croit pouvoir calculer, à l'aide de tables spéciales, la forme de l'axe hydraulique d'un courant dont la pente n'est pas constante, et dont l'aire et la forme des sections varient arbitrairement.

sur une même ligne de pente. La ligne des résistances, quoique ne pouvant présenter de contre-pente, aura cependant des points d'inflexion situés d'une manière analogue, sur une ligne de pente parallèle à celle de l'axe hydraulique. Les équations $I = \frac{\Delta H' - \Delta h'}{\Delta l}$, $I = \frac{\Delta E - \Delta z}{\Delta l}$, conduiraient à des résultats analogues pour l'axe hydraulique comparé soit à la ligne du fond, soit à la ligne des centres.

124. Tout courant permanent dont le mouvement n'est pas uniforme, doit toujours présenter à sa surface des ondulations successives plus ou moins prononcées; en effet, dans ce courant, il n'y a pas, en chaque point, égalité entre la quantité d'action développée par la pesanteur et celle absorbée par la résistance, la première de ces quantités est tantôt plus grande et tantôt plus petite que la seconde; lorsqu'elle est plus grande, la vitesse s'accélère et la pente augmente, en sorte que l'élément de l'axe hydraulique s'abaisse au-dessous de la tangente menée au point qui précède immédiatement.

Lorsqu'au contraire, la quantité d'action développée par la pesanteur est moindre que celle absorbée par la résistance, la vitesse et la pente diminuent, puis l'élément de l'axe hydraulique s'élève au-dessus de la tangente menée au point de cet axe qui précède immédiatement.

Comme les limites entre lesquelles la vitesse d'un courant peut varier, sont très-rapprochées, puisque

si la vitesse s'accélère, la résistance qui croît comme le carré de la vitesse, modère d'abord cette accélération, la détruit ensuite, et peut même rendre la vitesse moindre qu'elle n'était primitivement; il s'ensuit que la pente, après avoir pris un léger accroissement, décroît ensuite et peut même, dans quelques circonstances, présenter une contre-pente de peu d'étendue. La surface des courants doit donc présenter fréquemment une suite d'ondulations plus on moins sensibles et plus ou moins étendues; ces ondulations seront généralement inégales et pourront cependant se trouver sur une même ligne de pente.

125. Il convient de faire observer que, quand le lit d'un courant est irrégulier ou lorsque la pente et la section varient arbitrairement, on peut prendre pour le profil du fond son intersection par une surface cylindrique verticale parallèle à l'axe hydraulique, ou plutôt passant par cet axe, afin que les distances qui séparent les différentes verticales ou ordonnées du profil soient égales aux distances entre les sections transversales; en effet, la ligne d'eau, dans chaque section, étant supposée horizontale, la quantité $\Delta H$ ou la pente absolue de la surface entre deux sections reste constante quels que soient les points de la ligne d'eau des sections que l'on considère, et pour deux sections consécutives on aura toujours $\Delta H = \Delta H' - (h' - h^\circ)$. Si l'on prenait pour $h^\circ$ et $h'$ les hauteurs moyennes des sections, on aurait encore $\Delta H = \Delta H' - (h' - h^\circ)$, alors $\Delta H'$ ne serait plus

la pente absolue du fond réel, mais bien celle d'un fond fictif déterminé par la ligne allant de l'extrémité d'une hauteur moyenne à une autre.

126. Jusqu'ici, nous avons considéré les équations aux différences comme composées de termes dont la plupart représentent les pentes absolues des différentes parties, et qui paraissent indépendants de la distance qui sépare les deux sections dont on s'occupe. Cette forme simple nous a permis de tirer quelques conséquences relatives aux ondulations que peuvent présenter l'axe hydraulique et la ligne des centres et aux inflexions de la ligne des résistances; mais, pour les applications pratiques, cette forme serait insuffisante, c'est pour remédier à cet inconvénient que nous allons indiquer une modification à faire à ces équations pour les rendre d'une application toujours facile.

Supposons, comme nous l'avons fait au n° 103, le courant partagé en tranches plus ou moins minces, sans être, comme précédemment, infiniment minces, ce qui ici n'est plus nécessaire, car il s'agit de lignes telles que l'axe hydraulique, la ligne des centres et celle des résistances dont la courbure est ordinairement si faible, que l'on pourrait, sans erreur sensible, admettre qu'une petite portion de chacune de ces lignes se confond soit avec sa tangente, soit avec sa corde, supposition que nous n'aurons pas à faire.

Considérons donc une de ces tranches dont l'épaisseur soit $\Delta l$, la pente absolue de sa surface $\Delta H$, dé-

signons toujours par $f_0$ et $f_1$, les pentes relatives de la ligne des résistances aux points qui correspondent aux sections extrêmes de la tranche, par $\Delta F$ la pente absolue de cette ligne entre les mêmes points. Supposons encore que sur l'étendue de la tranche, la courbure de la ligne des résistances soit très-faible, continue et sans inflexion; comme les angles que la corde d'un arc de cette ligne fait avec les tangentes menées à ses extrémités, sont toujours très-petits, on peut appliquer ici le théorème du n° 64 et poser $\Delta F = (f_0 + f_1)\frac{\Delta l}{2}$, cette valeur de $\Delta F$ introduite dans l'équation (1) donne $\Delta H = (f_0 + f_1)\frac{\Delta l}{2} + \Delta h \ldots$ (4). Nous devons maintenant faire observer que l'équation précédente qui résulte de propriétés purement géométriques, est susceptible d'être appliquée à des arcs d'une grandeur finie et même d'une étendue considérable, car pour que cette équation donne des résultats exacts, il suffit que la corde de l'arc que l'on considère fasse des angles très-petits et sensiblement égaux avec les tangentes des extrémités de cet arc, ce qui aura généralement lieu pour la ligne des résistances, pourvu toutefois que sa courbure soit continue et sans inflexion. Lorsque ces conditions ne sont pas remplies, l'équation $\Delta F = \left(\frac{f_0 + f_1}{2}\right)\Delta l$ cesse d'être applicable; si, par exemple, l'arc que l'on considère présentait une inflexion, les deux tangentes extrêmes pourraient être parallèles, on aurait alors

$f_0 = f_1$, et dans cette circonstance $\Delta F$ serait égal à la hauteur due à la pente des éléments extrêmes sur la longueur $\Delta l$, plus la distance verticale entre les parallèles déterminées par le prolongement des mêmes éléments, tandis que si dans l'équation $\Delta F = \left(\frac{f_0 + f_1}{2}\right)\Delta l$ on fait $f_0 = f_1$, il vient $\Delta F = f\Delta l$, valeur qui, d'après ce que nous venons de dire, est évidemment incomplète. Quand il s'agit de chute ou de relèvement, la courbure de la ligne des résistances pouvant présenter des inflexions, pouvant même cesser d'être continue, il faut alors se garder d'appliquer l'équation $\Delta F = \left(\frac{f_0 + f_1}{2}\right)\Delta l$, ou n'en faire usage que pour de très-petites valeurs de $\Delta l$. Lors donc que, sur la longueur $\Delta l$, l'arc que l'on considère aura une courbure très-faible et sans inflexion, on pourra remplacer $\Delta F$ par $\left(\frac{f_0 + f_1}{2}\right)\Delta l$, $\Delta H$ par $\left(\frac{I_0 + I_1}{2}\right)\Delta l$, $\Delta E$ par $\left(\frac{e_0 + e_1}{2}\right)\Delta l$; dans toute autre circonstance, il faudra se rappeler que les vraies valeurs de $\Delta E$, $\Delta H$, $\Delta E$, $\Delta H'$, sont $\int f dl$, $\int I dl$, $\int e dl$, $\int i dl$, et que l'on ne peut les confondre avec $f\Delta l$, $I\Delta l$, $e\Delta l$, $i\Delta l$, que lorsque les pentes relatives, $f$, I, $e$ et $i$, sont constantes ou peuvent être considérées comme telles sur la longueur $\Delta l$.

127. Les équations (1), (2) et (4) dont nous ferons une constante application, ont chacune des avantages qui leur sont propres et que nous allons résumer succinctement.

L'équation (1) qui résulte des lois de la mécani-

que, donne des résultats d'une grande exactitude, lorsque l'on peut négliger la résistance, comme cela a lieu lorsqu'il s'agit d'apprécier les effets brusques qui ont lieu sans choc ou sans perte de force vive, entre des sections très-rapprochées, tels que ceux qui ont lieu au passage des ponts, des pertuis, des barrages et en général dans toutes les circonstances où la vitesse du courant éprouve un changement très-sensible sur une faible longueur, dans toutes ces circonstances l'équation (1) se réduit à $\Delta H = \Delta h = h_1 - h_0$. Lorsqu'il faut avoir égard à la résistance due au frottement, on ne peut appliquer l'équation (1) que entre des points très-rapprochés et quand les sections n'éprouvent pas de trop brusques variations, surtout quand on croit pouvoir lui donner cette forme $\Delta H = f\Delta l + \Delta h$, en remplaçant $\Delta F = \int f dl$ par $f\Delta l$.

L'équation (2) qui est déduite de considérations purement géométriques, est toujours exacte quelle que soit la grandeur de $\Delta l$, pourvu que les sections soient verticales; mais cette équation est d'une faible utilité lorsque l'on connaît seulement les aires et les périmètres des sections sans connaître leur forme, circonstance qui doit rarement se présenter.

L'équation (4) convient surtout quand la courbure de la surface est très-faible, ou lorsque les angles de la corde de l'axe hydraulique avec les tangentes des extrémités de cet arc sont très-petits et sensiblement égaux, comme cela a lieu dans les parties des courants situées en amont des barrages; cette équation

peut alors s'appliquer à des arcs d'une étendue considérable, et donne dans cette circonstance des résultats d'une grande exactitude, tant que la courbure de ces arcs est continue, sans inflexion ni rebroussement. Pour mettre hors de doute les avantages de l'équation (4) nous allons faire quelques applications dont nous prendrons les données, dans l'hydrotechnie de Funck, parmi les résultats de mesures prises sur le Weser; nous calculerons les valeurs de $\Delta H$ par la formule (4) et par la formule $\Delta H = f\Delta l + \Delta h$, qui est comme on sait une modification de l'équation (1).

| Nos d'ordre de Funck. | Quantités mesurées. | | | | Valeurs de ΔH calculées par la formule. | | Observations. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\Delta l$ | $\omega$ | $\chi$ | $\Delta H$ | N° 4. | N° 1 modifiée. | |
| 413 | | 57m28 | 124m81 | | | | |
| | 656m32 | | | 0.4787 | 0.4267 | 0.7592 | Le calcul a donné, pour le débit du Weser, à l'époque des observations, 68m.00; c'est ce nombre dont nous nous sommes servis, pour calculer les valeurs de ΔH. |
| 414 | | 99.27 | 115.54 | | | | |
| | 853.22 | | | 0.1096 | 0.1020 | 0.1717 | |
| 415 | | 155.04 | 114.26 | | | | |
| | 581.31 | | | 0.0211 | 0 0228 | 0.0284 | |
| 416 | | 193.43 | 133.60 | | | | |
| | 360.98 | | | 0.0114 | 0.0381 | 0.0210 | |
| 417 | | 125.18 | 136.53 | | | | |
| | 257.84 | | | 0.0181 | 0.0353 | 0.0369 | |
| 418 | | 121.49 | 134.19 | | | | |
| 449 | | 82.36 | 75.60 | | | | |
| | 44.53 | | | 0.0062 | 0.0086 | 0.0089 | |
| 450 | | 85.20 | 82.03 | | | | |
| | 46.88 | | | 0.0062 | 0.0077 | 0.0082 | |
| 451 | | 89.91 | 89.07 | | | | |

L'application que nous venons de faire prouve

que l'équation (4) donne pour $\Delta H$ des valeurs sensiblement égales à celles observées, pour les grandes comme pour les petites distances, tandis que l'équation (1) modifiée donne pour $\Delta H$ des valeurs trop fortes lorsque la distance $\Delta l$ est supérieure à cinq cents mètres.

128. Nous rappellerons une dernière fois, que l'on pourra presque toujours remplacer $\Delta H$ par $(I_0+I_1)\frac{\Delta l}{2}$, $\Delta F$ par $(f_0+f_1)\frac{\Delta l}{2}$, $\Delta E$ par $(e_0+e_1)\frac{\Delta l}{2}$; quant à la hauteur $\Delta H'$, ou à la pente absolue du fond, elle est ordinairement une des données de la question que l'on a à traiter; comme cette pente varie souvent arbitrairement, on ne peut la remplacer par $(i_0+i_1)\frac{\Delta l}{2}$, que dans les cas très-rares où la ligne du fond est une courbe continue et à faible courbure; dans le cas particulier et assez fréquent où cette ligne est une droite ou peut être remplacée par une droite, on a nécessairement $\Delta H' = i\Delta l$.

Si nous substituons dans les équations (1) et (2) pour $\Delta H$ et $\Delta F$, les valeurs que nous venons de rappeler, nous en déduirons plusieurs conséquences dont nous ferons connaître les plus importantes.

Considérons d'abord l'équation (2) qui donne $\Delta H = \Delta H' - (h' - h^0)$; si l'axe hydraulique est concave et que les sections étant verticales, les hauteurs soient croissantes, alors $h'$ sera plus grand que $h_0$ et le terme $(h' - h^0)$ restera négatif. Dans le cas particulier où la

pente du fond est constante et égale à $i$ on a $\Delta H' = i\Delta l$, et comme on peut ordinairement remplacer $\Delta H$ par $(I_0 + I_1)\frac{\Delta l}{2}$ ou encore par $(f_0 + f_1)\frac{\Delta l}{2} + h_1 - h_0$, on aura $(I_0 + I_1)\frac{\Delta l}{2} = (f_0 + f_1)\frac{\Delta l}{2} + h_1 - h_0 = i\Delta l - (h' - h^0)$, d'où on tirera à volonté, pour la distance qui doit séparer les deux sections dont les hauteurs sont $h^0$ et $h'$, $\Delta l = \frac{2(h^0 - h')}{2i - (I_0 + I_1)}$, et $\Delta l = \frac{2(h' + h_1 - (h^0 + h_0))}{2i - (f_0 + f_1)}$. Lorsque l'élément de l'axe hydraulique, qui correspond à la section $\omega_0$, est parallèle au fond on a $I_0 = i$ et il vient $\Delta l = \frac{2(h' - h^0)}{i - I_1}$.

Lorsque l'élément de l'axe hydraulique qui correspond à la section $\omega_1$ est horizontal, on a $I_1 = o$ et il vient $\Delta l = \frac{2(h' - h^0)}{2i - I_0}$. Si dans cette dernière circonstance on avait de plus $I_0 = i$, il resterait $\Delta l = \frac{2(h' - h^0)}{i}$.

Si l'axe hydraulique étant toujours concave les hauteurs des sections sont décroissantes, $h^0$ sera plus grand que $h_1$ et l'on aura $\Delta H = \Delta H' + h^0 - h'$, d'où on tirera $\Delta l = \frac{2(h^0 - h')}{I_0 + I_1 - 2i}$.

Dans le cas particulier où l'élément de l'axe hydraulique qui correspond à la section $\omega_1$ est parallèle au fond, on a $I_1 = i$ et il reste $\Delta l = \frac{2(h^0 - h')}{I_0 - i}$; il est d'ailleurs évident que quand les hauteurs sont décroissantes, l'axe hydraulique ne peut avoir d'élé-

ment horizontal. Si l'axe hydraulique est convexe et que les hauteurs des sections soient croissantes $h'$ sera plus grand que $h^\circ$ et l'on aura $\Delta H + \Delta H' = h' - h^\circ$, et par suite $\Delta l = \frac{2(h' - h^\circ)}{2i + I_0 + I_1}$ ou encore

$$\Delta l = \frac{2(h' + h_1 - (h^\circ + h_0))}{2i + f_0 + f_1}.$$

Dans le cas particulier où l'élément qui correspond à la section $\omega_1$ est horizontal, on a $I_1 = o$ et il reste

$$\Delta l = \frac{2(h' - h^\circ)}{2i + I_0}.$$

Dans le cas particulier où l'élément qui correspond à la section $\omega_0$ est parallèle au fond, on a $I_0 = i$, et il vient $\Delta l = \frac{2(h' - h^\circ)}{3i + I_1}$. Cette circonstance fort rare se présente cependant dans les relèvements par réduction de vitesse, l'axe hydraulique a alors un point de rebroussement dont une des tangentes est parallèle au fond; si dans cette circonstance on avait de plus $I_1 = o$ il resterait $\Delta l = \frac{2(h' - h^\circ)}{3i}$.

Si, l'axe hydraulique étant toujours convexe, les hauteurs des sections sont décroissantes, $h^\circ$ sera plus grand que $h'$, alors on aura $\Delta H = \Delta H' + h^\circ - h'$, et par suite $\Delta l = \frac{2(h^\circ - h')}{I_0 + I_1 - 2i}$, valeur déjà trouvée ci-dessus; mais alors, la courbe étant concave, on avait nécessairement $I_0 + I_1 < 2i$, en sorte que $\Delta l$ était négatif, tandis que, dans la circonstance qui nous

occupe, la courbe étant convexe, on a $I_0 + I_1 > 2i$ et $\Delta l$ est alors positif.

Dans le cas particulier où l'élément de l'axe hydraulique qui correspond à la section $\omega_0$ est parallèle au fond, on a $I_0 = i$ et il reste $\Delta l = \frac{2(h^0 - h')}{I_1 - i}$; il est d'ailleurs évident que, quand les hauteurs sont décroissantes et que l'axe hydraulique est convexe, cet axe ne peut avoir d'élément horizontal.

129. La formule $\Delta l = \frac{2(h' - h^0)}{2i \pm (I_0 + I_1)}$ ou, si l'on veut, $\Delta l = \frac{2(h' + h_1 - (h^0 + h_0))}{2i \pm (f_0 + f_1)}$, à laquelle nous venons de parvenir, par une méthode aussi simple que facile à retenir, donne donc le moyen de déterminer dans tout courant dont le lit a une pente constante, la distance qui sépare deux sections verticales dont les hauteurs et les pentes relatives correspondantes sont respectivement $h^0$, $I_0$, $h'$ et $I_1$; ce résultat est fort important et va nous servir à déterminer la distance à laquelle doit se faire sentir l'effet d'un obstacle quelconque qui peut se trouver dans le lit d'un courant, ou encore l'effet d'une chute ou d'une ouverture pratiquée dans le fond ou sur les côtés de ce courant.

Lorsqu'un obstacle contrarie le libre cours des eaux, il détermine un relèvement dont l'axe hydraulique est ordinairement concave; si le lit du courant a une pente constante $i$, la formule $\Delta l = \frac{2(h' - h^0)}{2i - (I_0 + I_1)}$ servira à déterminer la distance qui se trouve entre

les deux sections dont les hauteurs sont $h'$ et $h^\circ$.

Si $h'$ est la hauteur de la section verticale la plus voisine de l'obstacle, celle où le relèvement atteint sa hauteur *maxima*, que $h^\circ$ soit la hauteur primitive du courant, celle qu'il conserve dans les parties où l'effet de l'obstacle cesse de se faire sentir, $h' - h^\circ$ sera la hauteur du relèvement que nous représenterons par $r$; de plus, à l'extrémité d'amont du relèvement, l'inclinaison de l'axe hydraulique est égale à $i$. Si donc on veut déterminer l'amplitude du relèvement, à partir du point de raccordement avec l'axe hydraulique primitif, il faut remplacer $I_0$ par $i$, on obtient ainsi, pour l'amplitude du relèvement, $\Delta l = \frac{2r}{i - I_{,}}$, formule qui diffère très-peu de celle à laquelle Dubuat était parvenu plutôt par empirisme que par théorie; cette formule a été abandonnée parce qu'on ne connaissait pas les lois qui la justifient et parce que l'on ignorait les modifications qu'elle doit subir suivant les circonstances.

Dans la formule $\Delta l = \frac{2r}{i - I_{,}}$, la limite inférieure des valeurs de $I_{,}$ étant zéro, il en résulte que la limite des valeurs de l'amplitude d'un relèvement dont l'axe hydraulique est concave, a pour expression $\frac{2r}{i}$, c'est-à-dire qu'elle est égale au double de l'amplitude hydrostatique; en donnant ce nom à la longueur de la ligne horizontale menée de l'extrémité supérieure du relèvement jusqu'à la rencontre de la surface

primitive du courant; car cette ligne a pour longueur $\frac{r}{i}$; elle sera celle de l'axe hydraulique lorsque le relèvement sera horizontal, ce qui arrivera toutes les fois que la pente et la section seront telles que l'on ait $i = \frac{\alpha\chi}{2L}$, ainsi que nous l'avons vu dans le n° 120.

L'étendue d'une partie quelconque du relèvement comprise entre le point où il se termine et un autre point où la hauteur du relèvement soit $r'$ et la pente $I'$, aura pour expression $\Delta l = \frac{2r'}{i - I'}$.

La distance entre deux points quelconques de la surface du relèvement résultera de la formule générale $\Delta l = \frac{2(h' - h^\circ)}{2i - (I_\circ + I_{,})}$, ainsi qu'il a été dit ci-dessus.

Lorsque la surface du courant est convexe et s'élève de l'amont vers l'aval, comme cela a lieu dans quelques circonstances assez rares dont nous aurons à nous occuper, $\Delta H$ est alors négatif, et l'expression générale de la distance entre deux sections quelconques devient $\Delta l = \frac{2(h' - h^\circ)}{2i + (I_\circ + I_{,})}$; cette formule, lorsqu'on y fait $I_\circ = i$ et $h' - h^\circ = r$, donne pour l'amplitude du relèvement, $\Delta l = \frac{2r}{3i + I_{,}}$, l'axe hydraulique étant convexe, la valeur de $I_{,}$ diminue sans cesse et approche de zéro qui lui sert de limite; si donc on fait $I_{,} = 0$, on aura, pour la distance comprise entre l'origine du relèvement et le point où la tangente de

l'axe hydraulique est horizontale, $\Delta l = \frac{2r}{3i}$, c'est-à-dire que cette distance est égale aux deux tiers de l'amplitude hydrostatique.

Depuis le point de l'axe hydraulique où la tangente est horizontale jusqu'au point où la tangente est parallèle au fond $\Delta H$ étant positif, la formule des distances devient $\Delta l = \frac{2(h' - h^\circ)}{2i - (I_0 + I_1)}$, et pour avoir la distance entre les points dont on vient de parler, il suffit de faire $I_0 = o$, $I_1 = i$, ce qui donnera

$$\Delta l = \frac{2(h' - h^\circ)}{i}.$$

Si, après le point dont la tangente est parallèle au fond, les eaux sont soutenues par un obstacle, la distance de cet obstacle se déterminera par la formule $\Delta l = \frac{2(h' - h^\circ)}{2i - (I_0 + I_1)}$, dans laquelle $I_0$ sera égal à $i$; $h'$ et $I_1$ correspondront au point où le relèvement causé par l'obstacle atteindra son maximum.

Quelques savants hydrauliciens remplacent l'équation (4) par $\Delta H = f\Delta l + \Delta h$ qui est moins exacte, car $\Delta F = \int f dl$, et ne peut être remplacé par $f\Delta l$ que dans des circonstances exceptionnelles; puis, ils combinent l'équation que nous venons de rapporter avec l'équation (2), et obtiennent ainsi $\Delta l = \frac{\Delta h' + \Delta h}{i - f}$. Cette expression, qui est à peu près celle proposée par M. de Prony, est moins exacte que celle dont nous venons de faire usage; elle paraît donner $\Delta l = \infty$, lorsque

$f_0 = i$, ou lorsqu'on veut déterminer le point où l'axe hydraulique du relèvement se raccorde avec l'axe hydraulique primitif; mais si, dans l'équation (1), on fait $i = f$ et que l'on rapproche le résultat de l'équation (2), on aura $\Delta h' + \Delta h = o$, c'est-à-dire que la valeur de $\Delta l$ devient $\frac{o}{0}$ lorsqu'on y fait $f = i$; la formule $\Delta l = \frac{\Delta h + \Delta h'}{i - f_0}$ est alors insuffisante et ne peut déterminer le point où les axes hydrauliques se raccordent.

Si le mouvement du courant, au lieu d'être contrarié par un obstacle, est, au contraire, favorisé par une ouverture ou une chute pratiquée dans le fond, alors les ordonnées de l'axe hydraulique seront décroissantes depuis le point où la tangente est parallèle au fond jusqu'à la chute où le liquide se déverse; l'axe primitif s'abaissera donc et deviendra convexe, la distance, entre deux points quelconques de la surface de l'abaissement, résultera des formules générales $\Delta l = \frac{2(h^0 - h')}{I_0 + I_1 - 2i}$ ou $\Delta l = \frac{2(h^0 + h_0 - (h' + h_1))}{f_0 + f_1 - 2i}$.

Quant à la plus petite section verticale, celle que présente le courant au moment de déverser, nous savons qu'elle est telle que $dh' + dh = o$, ce qui donne, pour déterminer sa hauteur, $h'^3 = \frac{Q^2}{gL^2}$, et de plus, $h_1 = \frac{h'}{2}$. Comme on connaît les hauteurs primitives $h^0$ et $h_0$, la différence $h^0 + h_0 - (h' + h_1)$,

qu'on peut représenter par $d$, est déterminée, la tangente $f_0$, correspondante à la section $\omega_0$, étant égale à $i$, on aura $\Delta l = \frac{2d}{f_1 - i}$; on sait d'ailleurs que $f_1 = \frac{ah_1\chi_1}{\omega_1} = \frac{ah_1\chi_1}{h'L_1}$, et comme $h' = 2h_1$, il vient $f_1 = \frac{a\chi_1}{2L_1}$, on a donc, pour l'amplitude de l'abaissement, $\Delta l = \frac{4dL_1}{a\chi_1 - 2L_1 i}$; nous savons d'ailleurs que cette expression ne peut pas devenir infinie, mais qu'elle donne une valeur indéterminée pour $\Delta l$ lorsque l'on a $i = \frac{a\chi}{2L}$, ou lorsque la pente du lit est telle que le courant débite, d'un mouvement uniforme, le plus grand volume par mètre courant de largeur, c'est-à-dire que, dans cette circonstance, l'axe hydraulique reste rectiligne jusqu'au plan vertical qui correspond à la chute, ou que la surface du courant ne s'abaisse que pour déverser.

Lorsque le fond est horizontal, on a $i = o$, et il reste, pour déterminer la distance entre deux sections quelconques, $\Delta l = \frac{2(h^0 + h_3 - (h' + h_1))}{f_0 + f_1}$. Si la section d'aval est la plus petite section verticale, on a, pour déterminer la hauteur de cette section, $h'^3 = \frac{Q^2}{gL^2}$, on sait d'ailleurs que $f_1 = \frac{a\chi_1}{2L_1}$, en sorte que l'amplitude, à partir de la plus petite section verticale, sera donnée par $\Delta l = \frac{4dL_1}{2Lf_0 + a\chi_1}$.

Lorsque le fond est incliné en sens contraire du

mouvement, $i$ est négatif, et la formule des distances devient $\Delta l = \frac{2(h^{\circ} + h_{\circ} - (h' + h_{,}))}{f_{\circ} + f_{,} + 2i}$; si, à la section dont la hauteur est $h^{\circ}$, doit correspondre une pente relative $f_{\circ}$ égale à $i$, ou si la tangente à la ligne des résistances doit faire avec l'horizontale et au-dessous de cette ligne un angle égal à celui que la ligne du fond fait au-dessus de cette ligne, on a $f_{\circ} = i$, et si la section, dont la hauteur est $h'$, est la plus petite section verticale, on a $f_{,} = \frac{a\chi_{,}}{2L_{,}}$, l'amplitude, à partir de cette dernière section, sera donnée par

$$\Delta l = \frac{4dL_{,}}{6L_{,}i + a\chi_{,}}.$$

Lorsque nous serons plus avancés, nous donnerons les moyens de déterminer les amplitudes des relèvements et des abaissements quand la pente du lit varie de la manière la plus arbitraire.

130. Maintenant que nous savons déterminer la forme qu'affecte la surface en amont du seuil d'un barrage, et celle qu'elle affecte en amont du seuil d'une chute ménagée dans le fond, occupons-nous de déterminer la forme de cette surface pendant le déversement, ou depuis la plus petite section verticale jusqu'au point où l'axe hydraulique rencontre le plan horizontal, passant par le seuil du barrage, où perce le fond du courant suffisamment prolongé.

Pour éviter des complications inutiles, nous admettrons que l'ouverture que présente le barrage ou

la chute est convenablement évasée, et que le niveau du seuil du barrage ou de la chute est égal ou supérieur à celui des eaux d'aval.

Le seuil étant plus élevé que le niveau d'aval, le liquide après l'avoir dépassé se versera librement dans l'air, et sur la petite longueur du déversement on pourra négliger la résistance due au frottement contre les côtés de l'ouverture du barrage ou de la chute; pour les différents points de la courbe du déversement on aura donc $\Delta H = h_{,} - h_{0}$. Si nous considérons la section horizontale du volume de déversement prise au niveau du seuil, la hauteur due à la vitesse, dans cette section, sera égale à $h^{0} + h_{0} = b$, ainsi que cela résulte de l'équation $\Delta H = h_{,} - h_{0}$ lorsqu'on y fait $\Delta H = h^{0}$.

Si nous désignons par $n_{0}$ la largeur, dans le sens de l'axe de la section horizontale, la propriété fondamentale du mouvement permanent donnera

$$n_{0} = \frac{Q}{L\sqrt{2gb}}.$$

Pour trouver l'équation de la courbe formée par l'axe hydraulique pendant le déversement, prenons pour origine des coordonnées le point où l'arête du seuil du barrage ou de la chute perce le plan vertical passant par l'axe hydraulique, désignons par $z$ les abscisses horizontales et par $y$ les ordonnées verticales; si nous faisons passer par le seuil un plan quelconque coupant obliquement le volume de déversement, et que $n$ soit la hauteur de la section ainsi

obtenue et $u$ la vitesse moyenne correspondante, la propriété fondamentale du mouvement permanent donnera $Ln \times u = Q$ ; mais la hauteur $n$ de chaque section oblique passant par le seuil est l'hypothénuse d'un triangle rectangle dont les côtés sont $z$ et $y$, c'est-à-dire que l'on a $n = \sqrt{z^2 + y^2}$, et si nous désignons par $h$ la hauteur due à la vitesse $u$, on aura $u = \sqrt{2gh}$, puis l'équation générale $\Delta H = h_{,} - h_{,,} = h^{\circ} - y$ donnera $h_{,} = h^{\circ} + h_{,,} - y = b - y$, et par conséquent $u = \sqrt{2g(b-y)}$.

La courbe que forme l'axe hydraulique pendant le déversement a donc pour équation

$$(z^2 + y^2)(b - y) = \frac{Q^2}{2gL^2},$$

mais $h'$ étant la hauteur de la section verticale au maximum de débit, on a $h' = \frac{2}{3}b$, et $h'^3 = \frac{Q^2}{2gL^2} = \frac{8}{27}b^3$, ce qui permet de donner à l'équation de la courbe les formes suivantes $(z^2 + y^2)(b - y) = \frac{4}{27}b^3$, ou $(z^2 + y^2)(\frac{3}{2}h' - y) = \frac{h'^3}{2}$, équations dont la première ne dépend plus que de $b$ ou de la puissance du courant au moment du déversement, et dont la seconde ne dépend que de la hauteur $h'$ de la section au maximum de débit, laquelle restera la même pour tous les courants quel que soit leur débit lorsque le rapport $\frac{Q}{L}$ restera constant.

Reprenons l'équation $(z^2 + y^2)(b - y) = \frac{Q^2}{2gL^2}$ et re-

marquons que quand $y=o$ elle donne, pour la largeur de la section horizontale, $z=\frac{Q}{L\sqrt{2gb}}$ comme cela doit être; les deux autres équations donnent, dans la même circonstance, $z=\frac{2b}{3\sqrt{3}}$ et $z=\frac{h'}{\sqrt{3}}$, c'est-à-dire que la largeur de la section horizontale ne dépend que de la puissance du courant, et qu'elle est égale au rayon du cercle dont $h'$ est le côté du triangle équilatéral inscrit.

Lorsque $z=o$, on a, pour déterminer la valeur de $y$ qui répond au seuil, $y^2(b-y)=\frac{Q^2}{2gL^2}=\frac{4}{27}b^3=\frac{h'^3}{2}$, d'où on tire à volonté $y=\frac{2}{3}b$, $y=h'$ comme cela doit être.

Il existe un point où l'axe hydraulique du déversement se raccorde avec l'axe hydraulique qui précède le barrage ou la chute ; pour trouver la valeur de $z$ qui y correspond, il suffit de faire remarquer qu'en ce point l'ordonné doit être égale à $h''$, ce qui donne $(z^2+h''^2)h_2=\frac{Q^2}{2gL^2}$. Lorsqu'il s'agira du relèvement causé par un barrage dont la hauteur est $\delta$, on aura encore $(h''+\delta)^2h_2=\frac{Q^2}{2gL^2}$, et pour déterminer la valeur de $z$, $(h''+\delta)^2=h''^2+z^2$, relation qui donne un moyen facile de déterminer le point de raccordement.

Lorsqu'il s'agira d'un abaissement on aura $y=h''$, $h''h_2=\frac{Q^2}{2gL^2}$, et par suite $z=o$, c'est-à-dire que la

courbe de déversement se raccordera avec la courbe d'abaissement immédiatement au-dessus du seuil, ou de la section au maximum de débit.

La tangente à la courbe de déversement ayant pour inclinaison sur l'horizontale $\frac{dy}{dz}=\frac{2z(b-y)}{z^2+3y^2-2by}$, pour obtenir la tangente au point de raccordement, il suffira de mettre dans cette expression la valeur de $z$ qui convient à ce point.

Nous devons faire observer que, quand on peut négliger la hauteur due à la vitesse dans la section d'amont, ou poser $h_2=o$, comme cela a lieu pour les épanchoirs des étangs, la tangente au point de raccordement sera toujours horizontale, ainsi que cela résulte de l'expression $\frac{dy}{dz}=\frac{2z(h''+h_2-y)}{z^2+3y^2-2y(h''+h_2)}$, lorsqu'on y fait en même temps $h_2=o$ et $y=h''$; la même expression fait d'ailleurs reconnaître que quand $h_2$ n'est pas nul, la courbe de déversement ne peut avoir de tangente horizontale; en effet, si la tangente pouvait être horizontale on aurait $\frac{dy}{dz}=o$, d'où $y=h''+h_2$; mais cette valeur de $y$ introduite dans l'équation de la courbe du déversement donne $z=\infty$, c'est-à-dire que cette courbe a pour asymptote la ligne horizontale menée à la hauteur $h''+h_2$ au-dessus du seuil.

## IV. Des différents ordres de questions que peut faire naître le mouvement permanent de l'eau dans les courants découverts.

### (1) Considérations générales.

131. Dans les différentes questions que fait naître le mouvement permanent de l'eau dans les courants découverts, on peut avoir à considérer des courants à lit régulier ou dont la pente est constante et dont la section conserve la même forme, ou des courants à lit irrégulier ou dont la pente et la section varient en chaque point d'une manière plus ou moins arbitraire en conservant cependant une certaine continuité.

Quel que soit le courant que l'on considère, qu'il soit à lit irrégulier ou régulier, le mouvement de l'eau peut donner lieu à deux ordres distincts de questions.

Dans les questions du premier ordre, le lit est considéré comme fixe et invariable, le cours de l'eau y est libre ou n'y rencontre pas d'obstacle, ni de chute.

Dans les questions du deuxième ordre, le lit n'est plus considéré comme fixe, et est susceptible d'éprouver certaines modifications; le cours des eaux peut y être contrarié par certains obstacles, tels que des ponts, des pertuis, des barrages, des îles, etc.; ou favorisé par des chutes et par un défaut de continuité dans le fond.

132. Pour traiter les questions du premier ordre,

il faut remarquer que le lit ne devant éprouver aucune modification, et sa forme étant donnée ou complétement définie, soit par des relations géométriques, soit par un nombre suffisant de sections transversales reliées entre elles par un profil longitudinal, la solution des questions ne peut dépendre que d'une partie des éléments suivants :

1° Le débit; 2° la forme des sections; 3° les distances entre les sections; 4° la pente du fond; 5° la vitesse qui correspond à une section déterminée ou la hauteur de l'eau dans cette section; 6° la pente de superficie en un point quelconque; 7° la pente absolue de superficie.

Les données étant ordinairement la forme des sections transversales, leurs distances et la pente absolue du fond, on a fréquemment à déterminer, soit le débit lorsque la pente de superficie est connue, soit la pente de superficie lorsque le débit est connu.

133. Dans les questions du deuxième ordre, le lit n'est plus considéré comme invariable, on doit y établir certains ouvrages ou lui faire éprouver certaines modifications, dont on désire apprécier les effets sur la hauteur de l'eau du courant et sur la courbure de son axe hydraulique; on connaît d'ailleurs le volume d'eau que le courant doit débiter dans l'unité de temps, ou plus généralement dans un temps donné.

Le lit est toujours déterminé par une suite de sec-

tions transversales rattachées entre elles par un profil longitudinal.

Le profil, dont nous venons de parler, étant une conséquence de la pente du fond et des distances qui séparent les sections, il s'ensuit qu'il ne peut être modifié sans que les sections n'en soient plus ou moins altérées, tandis que l'inverse n'a pas toujours lieu ; car on peut élargir ou rétrécir une ou plusieurs des sections transversales sans altérer le profil longitudinal. Toute modification du lit d'un courant est donc toujours produite par l'altération de l'une ou de plusieurs des sections transversales.

134. Puisque les modifications que le lit d'un courant peut éprouver proviennent des altérations que l'on peut faire subir à ses sections transversales ; pour distinguer ces diverses modifications, cherchons à reconnaître le nombre des altérations qu'une section peut subir.

Lorsque l'on considère l'ensemble d'une section, les altérations qu'elle peut éprouver se réduisent à deux, qui sont une augmentation ou une diminution de surface ; mais, quand on considère une section comme dépendant de ses deux dimensions, sa hauteur ou profondeur et sa largeur, ces dimensions pouvant être plus ou moins altérées, la section paraît susceptible d'éprouver huit modifications distinctes, car elle peut être rétrécie, élargie, relevée, approfondie ; elle peut être, en même temps, rétrécie et approfondie, relevée et rétrécie, élargie et appro-

fondie, relevée et élargie; enfin, ces modifications pourront être brusques ou graduelles. Une section peut encore être altérée par l'abaissement de sa partie supérieure; mais, si cette altération a lieu sur une certaine longueur, le courant cesse d'être découvert, et ce n'est pas ici le lieu de traiter les questions qui se rapportent à cette circonstance; si l'altération est sans étendue, comme lorsqu'il s'agit du passage de l'eau par l'ouverture d'une vanne en partie plongée, cette modification trouvera naturellement sa place dans le III^e livre, où il sera question de l'écoulement de l'eau par divers orifices.

Les modifications que l'on peut faire en un point déterminé du lit d'un courant découvert, peuvent donc en général donner lieu à seize questions qui paraissent différentes; nous disons qui paraissent, car la différence que présentent ces questions est souvent plus apparente que réelle; en effet, si l'on réduit la largeur ou la profondeur d'une section, il ne peut en résulter qu'une diminution de l'aire de cette section; à plus forte raison l'aire de cette section est-elle diminuée lorsque la réduction de largeur et le relèvement du fond sont simultanés. Pour traiter les trois questions qui résultent de ces altérations, il suffit de savoir apprécier les effets produits par la diminution de l'aire d'une section.

De même, si l'on augmente la largeur ou la profondeur d'une section, il en résultera une augmentation de l'aire de cette section; si l'augmentation

de la largeur et celle de la profondeur sont simultanées, l'accroissement de l'aire de la section n'en deviendra que plus sensible, et, pour traiter les trois questions qui résultent de ces altérations, il suffit de savoir apprécier les effets produits par l'augmentation de l'aire d'une section.

Si la section est en même temps rétrécie et approfondie, ou si elle est élargie et relevée, ces deux effets pouvant se neutraliser, l'aire de la section pourra rester la même, et si la courbure de la surface présente un léger changement, il sera uniquement dû à la variation du contour de la section. Si, par les altérations dont il vient d'être question, l'aire de la section cesse d'être constante, si, par exemple, elle est diminuée, pour apprécier les effets de cette diminution, il faudra procéder comme on ferait pour une diminution quelconque.

Si l'aire de la section est au contraire augmentée, on procédera d'une manière analogue. Les seize questions auxquelles semblent donner lieu les variations que peuvent éprouver les dimensions d'une section se réduisent donc à deux qu'il suffit de savoir traiter.

135. Lorsque les modifications s'étendent sur une certaine longueur ou s'appliquent à un grand nombre de sections successives, les mêmes questions se reproduisent, mais il faut prendre en considération l'étendue des parties modifiées.

Les questions du deuxième ordre, que fait naître

le mouvement de l'eau dans les courants découverts, paraissent donc être au nombre de trente-deux, qui se réduisent à quatre principales; nous donnerons les moyens de les résoudre après nous être occupé des questions du premier ordre.

136. Les diverses modifications dont il vient d'être question sont les seules que puisse éprouver le lit d'un courant; comme elles ont toujours pour résultat d'en relever ou d'en abaisser la surface sur une étendue plus ou moins considérable, nous aurons à considérer ces différents effets. Pour faciliter ce que nous aurons à dire, nous continuerons d'appeler relèvement de la surface, ou simplement relèvement, tout effet produit par un obstacle plus ou moins étendu qui, en rétrécissant le passage, oblige la surface de l'eau à se relever. Les effets des barrages, des épis, des pertuis, des ponts, des îles, des digues longitudinales, et même celui du reflux de la mer, seront pour nous des relèvements.

L'approfondissement du lit, le creusement d'une passe, l'ouverture d'une dérivation ou d'un nouveau bras, auront, en général, pour effet d'abaisser la surface de l'eau dans la partie où l'on aura travaillé, et souvent dans celle située en amont, et, par conséquent, de produire ce que nous appelons un *abaissement*. La suppression d'un obstacle qui causait un relèvement produira également un abaissement dans la partie du courant située en amont de l'obstacle supprimé.

Nous pouvons maintenant nous occuper des questions du premier ordre, et pour procéder du simple au composé, commençons par celles qui se rapportent aux courants à lit régulier et à pente constante, ou dont le mouvement est uniforme.

### (2) Questions du premier ordre dans les courants à lit régulier et à pente constante.

137. Les questions du premier ordre, dans les courants découverts à lit régulier et à pente constante, dépendent du débit Q, de l'aire de la section $\omega$, de la pente I, de la vitesse moyenne $u$, ou plutôt de la hauteur $h$ due à cette vitesse, enfin, du contour $\chi$ de la section.

Pour résoudre ces questions, on doit faire observer que, indépendamment de la relation géométrique qui résulte de la forme de la section et qui donne $\frac{\omega}{\chi} = R$ pour toutes les hauteurs que l'eau peut avoir dans le courant, la permanence et l'uniformité du mouvement donnent encore les relations suivantes : $Q = u\omega$ ou plutôt $h = \frac{Q^2}{2g\omega^2}$, et $RI = ah$. Lors donc que l'on connaîtra deux des quatre quantités Q, $\omega$, $h$ et I, on pourra facilement déterminer les deux autres ; les diverses combinaisons de ces quantités portent à six le nombre des questions que l'on peut avoir à résoudre ; nous présentons la solution générale de chacune d'elles dans le tableau suivant :

*Solution générale des questions du 1er ordre sur le mouvement uniforme dans les courants découverts à pente constante.*

| Numéros d'ordre. | Énoncé général des questions. | Quantités données. | Quantités à déterminer. | Observations. |
|---|---|---|---|---|
| 1 | Le débit et l'aire de la section étant connus : *Déterminer la pente et la hauteur due à la vitesse.* | Q, $\omega$ | I, $h$ | (1) La forme de la section étant définie, $\omega$ fait connaître $\chi$, on a ensuite $h=\frac{Q^2}{2g\omega^2}$, $I=\frac{a\chi}{\omega}h$. Si la forme de la section était indéterminée, on pourrait satisfaire à la condition du maximum et prendre $R=\frac{h'}{2}$. |
| 2 | Le débit et la pente étant connus : *Déterminer l'aire de la section et la hauteur due à la vitesse.* | Q, I | $\omega$, $h$ | (2) La section étant définie, il existe une première relation entre $\omega$ et $\chi$, l'équation $I=\frac{aQ^2}{2g}\times\frac{\chi}{\omega^3}$ en établit une autre entre les mêmes quantités, $\omega$ et $\chi$ sont donc déterminées, on a ensuite $h=\frac{Q^2}{2g\omega^2}$. |
| 3 | Le débit et la hauteur due à la vitesse étant connus : *Déterminer l'aire de la section et la pente.* | Q, $h$ | $\omega$, I | (3) $\omega=\frac{Q}{\sqrt{2gh}}$, $\omega$ fait connnaître $\chi$, puis $I=\frac{a\chi}{\omega}h$. |
| 4 | L'aire de la section et la pente étant connues : *Déterminer le débit et la hauteur due à la vitesse.* | $\omega$, I | Q, $h$ | (4) $\omega$ fait connaître $\chi$, ce qui donne $h=\frac{\omega I}{\chi a}$, puis $Q=\omega\sqrt{2gh}$. |
| 5 | L'aire de la section et la hauteur due à la vitesse étant connues : *Déterminer le débit et la pente.* | $\omega$, $h$ | Q, I | (5) $Q=\omega\sqrt{2gh}$, $\omega$ faisant connaître $\chi$, on a $I=\frac{a\chi}{\omega}h$. |
| 6 | La pente et la hauteur due à la vitesse étant connues : *Déterminer le débit et la section.* | I, $h$ | Q, $\omega$ | (6) $\frac{\omega}{\chi}=\frac{ah}{I}$ donne une première relation entre $\omega$ et $\chi$, il en existe une autre qui résulte de la forme de la section, $\omega$ et $\chi$ sont donc déterminés, on a ensuite $Q=\omega\sqrt{2gh}$. |

138. Nous pouvons maintenant faire quelques applications numériques afin de familiariser avec la méthode qu'il convient de suivre dans chaque cas particulier.

*Pour alimenter les fontaines d'une ville importante, on peut disposer de* $3^m.00$ *cubes d'eau par seconde; mais, pour conduire ces eaux au réservoir d'alimentation, on est obligé d'ouvrir un canal de* 100 *kilomètres de longueur; alors, pour augmenter les avantages que l'on peut assurer à la ville, on désire que le canal soit navigable, ce qui oblige de donner à la section d'eau une hauteur de* $1^m.50$; *on sait d'ailleurs que, pour ne pas altérer la qualité de l'eau, la vitesse doit être de* $0^m.35$ *au moins; enfin, on sait encore que la nature des terres oblige de donner aux talus* $2^m.00$ *de hauteur sur* $3^m.00$ *de base; on demande quelle doit être la pente qu'il convient de donner au canal?*

D'après l'énoncé qui précède, on connaît le débit $Q = 3^m.00$, la vitesse $u = 0^m.35$, et, par suite, la hauteur due à cette vitesse est $h = 0^m.00624$; on sait enfin que la section doit être un trapèze de $1^m.50$ de hauteur, dont les talus auront $2^m.25$ de base; avec ces données, il est facile de résoudre la question; on a d'abord $\omega = \frac{Q}{u} = \frac{3.00}{0.35} = 8^m.571$, et si $n$ est la la largeur du plafond de la section, on a encore $\omega = (n + 2.25)1.50 = 8.571$, ce qui donne $n = 3.46$, et par suite $\chi = n + 3\sqrt{3.25} = 8.868$, d'où

$$R = \frac{\omega}{\chi} = 0.966.$$

La pente par kilomètre doit donc être

$$1000I = 1000\frac{ah}{R} = \frac{7.848}{0.966} \times 0.00624 = 0.05056;$$

le canal devant avoir un développement de 100 kilomètres, pour que les conditions obligées soit remplies, il faut pouvoir disposer d'une pente totale ou absolue d'au moins $5^m.056$.

Si l'on devait craindre que la résistance due au frottement fût augmentée ou la vitesse diminuée par les herbes qui pourront croître sur le fond du canal, il faudrait augmenter la pente d'après l'appréciation de cette nouvelle résistance que l'on obtiendrait au moyen d'observations faites dans les courants des localités voisines.

139. *Un canal destiné à conduire l'eau nécessaire pour arroser* 10,000 *hectares de terrain, doit débiter, chaque jour, un volume de* 5 *litres par mètre carré, la pente dont on peut disposer est seulement de* $\frac{1}{1000}$, *l'on sait d'ailleurs que la nature du sol oblige à donner aux talus* $2^m.00$ *de base pour* $1^m.00$ *de hauteur; on demande de déterminer la surface ou les dimensions qu'il convient de donner à la section de ce canal?*

D'après l'énoncé qui précède, on connaît le débit $Q = \frac{0.005 \times (10000)^2}{86400} = 5.787$, la pente $I = 0.001$, l'inclinaison du talus $b = 2$, on peut d'ailleurs faire en sorte que la section ait le moins de contour pour la surface nécessaire, ce qui donne

$$\frac{\omega}{\chi} = \frac{h'}{2},\ c = 2\sqrt{1+b^2} = 4.50, \text{ et } \omega = (c-b)h'^2 = 2.50h'^2;$$

enfin l'équation $\frac{\omega I}{\chi} = ah$ donnera $h'^5 = \frac{aQ^2}{gI(c-b)^2}$ ou $h' = 1.33$, et par suite $n = \frac{\omega}{h'} - bh' = 0.50h' = 0.66$, $\chi = 6.44$, $\omega = 4.42$; par conséquent, le canal dont il s'agit doit avoir une section de $0^m.66$ de largeur au plafond sur $1^m.33$ de profondeur ou de $4^m.42$ de surface, l'eau y coulera avec une vitesse de $1^m.30$, et n'attaquera pas le fond s'il est en gravier ou autre matière plus résistante.

140. *Un canal dont la section est un trapèze de* $1^m.50$ *de profondeur sur* $1^m.00$ *de largeur au plafond, avec des talus inclinés de* 45°, *a une pente de* $1^m.00$ *par kilomètre; on demande le volume d'eau qu'il conduit dans chaque seconde et la vitesse moyenne de cette eau?*

D'après l'énoncé qui précède, on a $I = 0.001$, $\omega = 3.75$, $\chi = 5.24$; l'équation $RI = ah$ donne $h = \frac{\omega I}{\chi^a} = 0.0913$, d'où $u = 1.34$, la relation $Q = u\omega$ donne ensuite $Q = 5.031$; par conséquent, le canal dont il s'agit débite, dans chaque seconde, 5031 litres avec une vitesse de $1^m.34$.

Nous pourrions multiplier les applications, mais cela aurait peu d'utilité, car celles que nous venons de faire suffisent pour familiariser avec l'esprit de la méthode qu'il convient de suivre.

141. Avant de terminer ce qui est relatif aux courants à lit régulier dont le mouvement est uniforme, il convient de faire observer que la régularité du lit ne suffit pas pour déterminer l'uniformité du mou-

vement. Ainsi, l'uniformité du mouvement n'existe pas, dans un courant à section régulière, lorsque la pente du fond cesse d'être constante; par exemple, lorsqu'elle devient nulle ou lorsqu'elle est en sens contraire du mouvement; ces irrégularités de la pente causent des variations dans l'aire et le contour de la section, et font perdre au mouvement son uniformité.

Le mouvement de l'eau à son entrée dans un canal régulier à pente constante n'est pas non plus uniforme; il tend à le devenir et le devient, en effet, lorsque l'eau a perdu l'excès de vitesse qu'elle pouvait avoir, ou a acquis celle qu'elle doit conserver, si sa vitesse était d'abord moindre. Le mouvement n'est pas non plus uniforme, dans un canal régulier à pente constante, lorsqu'un obstacle ou une chute vers l'aval altère la régularité de l'une des sections, et produit un effet qui s'étend souvent à une grande distance vers l'amont.

Dans ces diverses circonstances, si le courant est alimenté par un produit constant, le mouvement est permanent sans être uniforme, et les questions qui peuvent se présenter doivent se traiter comme si le lit était irrégulier.

(3) Questions du premier ordre dans les courants découverts à lit irrégulier ou à pente variée.

142. Les cours d'eau naturels, tels que les ruisseaux, les rivières et les fleuves, sont des courants à

lit irrégulier et à pente variée; lorsque ces courants débitent, dans chaque unité de temps, un égal volume d'eau, leur mouvement est permanent; la permanence du mouvement se reconnaît sans avoir besoin de mesurer le débit, il suffit que le niveau du courant reste invariable pendant un temps plus ou moins long; la durée de la constance du niveau est celle de la période de permanence.

Quand on veut déterminer les circonstances du mouvement de l'eau dans un courant découvert à pente variée, il est nécessaire que le lit du courant soit complétement déterminé et défini par un profil longitudinal, et un nombre suffisant de sections transversales ou seulement par des relations géométriques; car de la forme et de la pente de ce lit dépendent toutes les circonstances du mouvement. Il résulte de là que quand l'aire $\omega$ d'une section est connue, le contour $\chi$ de cette section et sa hauteur $h'$ en sont des conséquences.

143. Les questions dont nous allons nous occuper dépendent du débit Q, de l'aire des sections $\omega_0$, $\omega_1$, etc., des contours $\chi_0$, $\chi_1$, etc., de ces sections, de la vitesse moyenne qui correspond à chaque section $u_0$, $u_1$, etc., ou plutôt de la hauteur due à cette vitesse $h_0$, $h_1$, $h_2$, etc., de la hauteur des sections qui, lorsqu'elles sont verticales, se confondent avec les hauteurs $h^0$, $h'$, $h''$, etc., de l'axe hydraulique au-dessus du fond, de la pente relative de l'axe hydraulique en chaque point $I_0$, $I$, $I_2$, etc., de la pente

relative du fond en chaque point $i_0$, $i_1$, $i_2$, etc., de la pente relative de la ligne des résistances en chaque point $f_0$, $f_1$, $f_2$, etc., ou des pentes absolues de l'axe hydraulique, de la ligne du fond et de celle des résistances $\Delta H$, $\Delta H'$ et $\Delta F$, enfin des distances entre les sections $\Delta l_0$, $\Delta l_1$, $\Delta l_2$, etc. Ces diverses quantités étant au nombre de douze, si, pour résoudre chaque question, elles devaient toutes entrer dans les calculs, il en résulterait des complications inextricables; heureusement il n'en est pas ainsi; en effet, nous savons déjà que de la forme du lit, qui est nécessairement définie, il résulte que des trois quantités $\omega$, $\chi$ et $h'$, il suffit que l'une soit déterminée pour connaître les deux autres; que de cette même forme résulte encore que les deux quantités $i$ et $\Delta H'$, I et $\Delta H$, $f$ et $\Delta F$, sont liées par des relations telles que l'une est toujours la conséquence de l'autre; enfin, nous ajouterons que $\Delta l$ et $\Delta H'$ sont ordinairement des données de la question, que la première résulte d'un chaînage et la seconde d'un nivellement.

Les quantités dont dépend la solution des questions du premier ordre dans les courants découverts à pente variée, lorsque le lit du courant est donné ou défini, peuvent donc se réduire aux cinq suivantes : Q, $\omega$, $h$, $f$, $\Delta H$. Pour résoudre ces questions, indépendamment des relations géométriques qui résultent de la forme générale du lit, de sa pente et de l'invariabilité de ses sections; on a, comme conséquence de la permanence du mouvement :

$$\Delta H = \left(\frac{f_0 + f_1}{2}\right)\Delta l + \Delta h \ldots (1),\ f = \frac{\omega \chi h}{\omega} = \frac{a Q^2}{2g} \times \frac{\chi}{\omega^3} \ldots (2),$$

$$h = \frac{Q^2}{2g\omega^2} \ldots (3);$$

il s'ensuit que des cinq quantités Q, $\omega$, $h$, $f$, $\Delta H$, on doit, lorsqu'on en connaît deux, pouvoir déterminer les trois autres. Les diverses combinaisons de ces quantités portent à dix le nombre des questions que l'on peut avoir à résoudre; nous allons présenter la solution générale de chacune de ces questions, dans le tableau suivant :

*Solution générale des questions du premier ordre sur le mouvement permanent de l'eau dans les courants découverts à lit irrégulier ou à pente variée.*

| Nos d'ordre. | Enoncé général de chaque question. | Quantités données. | Quantités à déterminer. | Solution générale de chaque question. |
|---|---|---|---|---|
| 1 | Le débit et les aires des sections étant connus : *Déterminer l'axe hydraulique, les hauteurs dues à la vitesse et la ligne des résistances.* | $Q$, $\omega$ | $\Delta H$, $h$<br>$f$ | $h=\frac{Q^2}{2g\omega^2}$, $f=\frac{aQ^2}{2g}\times\frac{\chi}{\omega^3}$, $\Delta H=\frac{(f_0+f_1)}{2}\Delta l+\Delta h$. |
| 2 | Le débit et la ligne des résistances étant connus : *Déterminer l'aire de la section en chaque point, l'axe hydraulique et la hauteur due à la vitesse.* | $Q$, $f$ | $\omega$, $\Delta H$<br>$h$ | La relation $f=\frac{aQ^2}{2g}\times\frac{\chi}{\omega^3}$ fait connaître $\omega$, puis $h=\frac{Q^2}{2g\omega^2}$ et $\Delta H=\frac{(f_0+f_1)}{2}\Delta l+\Delta h$. |
| 3 | Le débit et la hauteur due à la vitesse étant connus : *Déterminer l'aire de la section, l'axe hydraulique et la ligne des résistances.* | $Q$, $h$ | $\omega$, $\Delta H$<br>$f$ | $\omega=\frac{Q}{\sqrt{2gh}}$, $f=\frac{a\chi h}{\omega}$, $\Delta H=\frac{(f_0+f_1)}{2}\Delta l+\Delta h$. |
| 4 | La ligne des résistances et l'aire de la section étant connues : *Déterminer l'axe hydraulique, le débit et la hauteur due à la vitesse.* | $f$, $\omega$ | $\Delta H$, $Q$<br>$h$ | $h=\frac{\omega f}{\chi a}$, $\Delta H=\frac{(f_0+f_1)}{2}\Delta l+\Delta h$, $Q=\sqrt{\frac{2gf}{a}\times\frac{\omega^3}{\chi}}$. |
| 5 | L'aire de la section et la hauteur due à la vitesse étant connues : *Déterminer l'axe hydraulique, la ligne des résistances et le débit.* | $\omega$, $h$ | $\Delta H$, $f$<br>$Q$ | $f=\frac{a\chi h}{\omega}$, $\Delta H=\frac{(f_0+f_1)}{2}\Delta l+\Delta h$, $Q=\sqrt{\frac{2g}{a}\times\frac{f\omega^3}{\chi}}$. |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 6 | La ligne des résistances et la hauteur due à la vitesse étant connues : *Déterminer l'axe hydraulique, l'aire de la section et le débit.* | $f$, $h$ | $\Delta H$<br>$\omega$<br>$Q$ | $\frac{\omega}{\chi}=\frac{ah}{f}$, $\Delta H=\frac{(f_0+f_1)}{2}\Delta l+\Delta h$, $Q=\sqrt{\frac{2g}{a}\times\frac{f\omega^3}{\chi}}$. |
| 7 | L'axe hydraulique et le débit étant connus : *Déterminer l'aire de la section, la hauteur due à la vitesse et la ligne des résistances.* | $\Delta H$<br>$Q$ | $\omega$, $h$<br>$f$ | L'axe hydraulique étant donné, on connaît la hauteur de chaque section et, par conséquent, sa surface, on a ensuite $f=\frac{aQ^2}{2g}\times\frac{\chi}{\omega^3}$, $h=\frac{Q}{2g\omega^2}$. |
| 8 | L'aire de la section et l'axe hydraulique étant connus : *Déterminer le débit, la hauteur due à la vitesse et la ligne des résistances.* | $\Delta H$<br>$\omega$ | $h$, $f$<br>$Q$ | $Q=\sqrt{\frac{4g}{a}\times\frac{\Sigma\Delta H}{\Sigma\Delta l\left(\frac{\chi}{\omega_0^3}+\frac{\chi}{\omega_1^3}\right)+\frac{2}{a}\left(\frac{1}{\omega_0^2}-\frac{1}{\omega_1^2}\right)}}$, $h=\frac{Q^2}{2g\omega^2}$,<br>$\Delta H=\left(\frac{f_0+f_1}{2}\right)\Delta l+\frac{Q^2}{2g}\left(\frac{1}{\omega_0^2}-\frac{1}{\omega_1^2}\right)=\frac{aQ^2}{4g}\left(\frac{\chi}{\omega_0^3}+\frac{\chi}{\omega_1^3}\right)\Delta l+\frac{Q^2}{2g}\left(\frac{1}{\omega_0^2}-\frac{1}{\omega_1^2}\right)$. |
| 9 | L'axe hydraulique et la hauteur due à la vitesse étant connus : *Déterminer la ligne des résistances, l'aire de la section et le débit.* | $\Delta H$<br>$h$ | $f$, $\omega$<br>$Q$ | L'axe hydraulique et la hauteur due à la vitesse étant donnés, on connaît la hauteur de chaque section et, par conséquent, sa surface, on a ensuite $f=\frac{a\chi h}{\omega}$ et $Q=\omega\sqrt{2gh}$. |
| 10 | L'axe hydraulique et la ligne des résistances étant connus : *Déterminer la hauteur due à la vitesse, l'aire de la section et le débit.* | $\Delta H$<br>$f$ | $h$, $\omega$<br>$Q$ | L'axe hydraulique et la ligne des résistances étant données, la distance verticale entre ces lignes donne en chaque point la hauteur due à la vitesse ; la distance verticale entre l'axe hydraulique et la ligne du fond donne aussi en chaque point la hauteur de la section et, par conséquent, sa surface, on en conclut $Q=\omega\sqrt{2gh}$. |

144. Les diverses questions dont nous venons de donner la solution générale ne sont pas toutes également utiles, plusieurs mêmes rentrent les unes dans les autres; en effet, lorsqu'un courant existe à l'état permanent, par une simple opération de sondage on détermine les aires et les contours des sections, un chaînage donne les distances entre les sections, tandis qu'un nivellement fait connaître la pente absolue entre deux sections consécutives; si, de plus, on a mesuré le débit, ainsi que cela arrive fréquemment, les quantités $\omega$, $\Delta H$ et Q sont alors données et les quantités qui restent à déterminer sont $h$ et $f$; la question ainsi posée comprend celles des n$^{os}$ 1, 7 et 8 du tableau précédent. Les trois premières questions, qui font connaître la pente absolue sous laquelle doit couler un débit donné, présentent quelque intérêt; il en est de même des troisième et septième questions qui ont pour objet de déterminer les sections $\omega$ qui correspondent à un débit connu; mais les questions les plus utiles sont les quatrième, cinquième et huitième; elles ont pour objet de déterminer le débit Q, lorsque l'on connaît une série de sections, la hauteur due à la vitesse moyenne qui correspond à chaque section, ou seulement la pente absolue de l'axe hydraulique, ou encore celle de la ligne des résistances. Comme la question n° 8 nous semble d'une grande importance, par les nombreuses applications dont elle est susceptible, nous allons nous en occuper d'une manière spéciale et donner à son sujet tous les développements nécessaires.

145. *On connaît, par un nivellement fait avec soin, la pente de superficie d'un courant permanent, on connaît, de plus, les aires et les périmètres de diverses sections dont les distances sont également connues, on désire déterminer le débit de ce courant.*

Pour résoudre cette question, nous devons observer que chaque couple de sections peut donner un débit par la formule $\Delta H = \left(\frac{f_0 + f_1}{2}\right)\Delta l + \Delta h$, puisque l'expression de la valeur de $f$ est $f = \frac{aQ^2}{2g} \times \frac{\chi}{\omega^3}$; or, les débits ainsi obtenus peuvent différer beaucoup entre eux, car, par deux sections prises isolément et conservant la même différence de niveau ou la même pente absolue, on peut faire passer un grand nombre de débits différents, et la formule donne le débit qui aurait lieu si la surface du courant avait une pente constante entre les deux sections que l'on considère. Si l'on prend trois sections, la courbe exprimée par la formule aura trois points de commun avec l'axe hydraulique du courant, et le débit que l'on obtiendra sera généralement un peu plus approché du débit réel; enfin, si l'on prend six, huit, dix ou douze sections à la fois, les deux courbes, ayant entre elles six, huit, dix ou douze points communs, se confondront sensiblement, et le débit donné par la formule approchera d'aussi près que l'on voudra du débit réel. Cela arrivera d'autant plus promptement que les sections varieront graduellement ou

n'éprouveront pas de variations brusques dans leurs dimensions, afin que les quantités de la forme $(f_0+f_1)\frac{\Delta l}{2}$ diffèrent peu des quantitités $\int f dl$ qu'elles remplacent, mais auxquelles elles ne sont pas rigoureusement égales.

Nous savons que $f=\frac{aQ^2}{2g}\times\frac{\chi}{\omega^2}$; pour simplifier nous remplacerons $\frac{\chi}{\omega^2}$ par $j$, en sorte que nous aurons $f_0=\frac{aQ^2}{2g}j_0, f_1=\frac{aQ^2}{2g}j_1$, etc.; si nous prenons les deux premières sections nous aurons

$$\Delta H_0=\frac{aQ^2}{4g}(j_0+j_1)+\Delta h_0,$$

et comme

$$\Delta h_0=h_1-h_0=\frac{Q^2}{2g}\left(\frac{1}{\omega_1^2}-\frac{1}{\omega_0^2}\right)=\frac{aQ^2}{4g}\times\frac{2}{a}\left(\frac{1}{\omega_1^2}-\frac{1}{\omega_0^2}\right),$$

il viendra

$$\Delta H_0=\frac{aQ^2}{4g}\left([j_0+j_1]\Delta l_0+\frac{2}{a}\left[\frac{1}{\omega_1^2}-\frac{1}{\omega_0^2}\right]\right),$$

les deux sections suivantes donneront

$$\Delta H_1=\frac{aQ^2}{4g}\left([j_1+j_2]\Delta l_1+\frac{2}{a}\left[\frac{1}{\omega_2^2}-\frac{1}{\omega_1^2}\right]\right),$$

etc. = etc.

De la première des équations que nous venons de poser, on obtient $\frac{aQ^2}{4g}=\frac{\Delta H^0}{(j_0+j_1)\Delta l_0+\frac{2}{a}\left(\frac{1}{\omega_1^2}-\frac{1}{\omega_0^2}\right)}$; la somme des deux premières donnera

$$\frac{aQ^2}{4g}=\frac{\Delta H_0+\Delta H_1}{(j_0+j_1)\Delta l_0+(j_1+j_2)\Delta l_1+\frac{2}{a}\left(\frac{1}{\omega_2^2}-\frac{1}{\omega_0^2}\right)};$$

enfin la somme d'un nombre quelconque $n$ de ces équations donnerait $\frac{aQ^2}{4g}=\frac{\Sigma_0^n\Delta H}{\Sigma_0^n\Delta l(j_0+j_1)+\frac{2}{a}\left(\frac{1}{\omega_n^2}-\frac{1}{\omega_0^2}\right)}$.

Lorsque l'addition d'un nouveau terme au numérateur et au dénominateur n'apportera plus de changement sensible à la valeur de $\frac{aQ^2}{4g}$, on sera alors certain d'obtenir la valeur exacte du débit; en effet $\frac{aQ^2}{4g}$ étant constant, on devrait toujours trouver la même quantité, si l'on pouvait toujours avoir la valeur exacte de $\int fdl$, et si l'on n'avait pas remplacé cette intégrale par $\Sigma\left(\frac{f_0+f_1}{2}\right)\Delta l$; mais la somme d'un grand nombre de termes de la forme de $\left(\frac{f_0+f_1}{2}\right)\Delta l$ ne doit pas différer sensiblement de l'intégrale $\int fdl$ prise entre les extrémités de la partie du courant que l'on considère; lors donc que la quantité $\frac{aQ^2}{4g}$ reste constante et égale à un nombre que nous pouvons représenter par $N^2$, on doit en conclure avec certitude que $Q=N\sqrt{\frac{4g}{a}}$.

146. Il convient de faire observer que la série des valeurs de la pente absolue de la ligne des résistances, donne aussi pour la quantité $\frac{aQ^2}{4g}$ une expres-

sion peu différente de celle que nous venons de trouver; en effet cette pente absolue est déterminée par la relation $\Delta F = \left(\frac{f_0 + f_1}{2}\right)\Delta l$, et la somme d'un certain nombre de termes analogues donne évidemment $\frac{aQ^2}{4g} = \frac{\Sigma \Delta F}{\Sigma \Delta l (j_0 + j_1)}$, il semble même qu'en variant le mode d'additionner les équations de la forme de $\Delta F = \frac{aQ^2}{4g}(j_0 + j_1)\Delta l$, on puisse obtenir pour $\frac{aQ^2}{4g}$ de nouvelles valeurs telles que les suivantes

$$\frac{aQ^2}{4g} = \frac{\frac{\Delta F_0}{\Delta l_0} + \frac{\Delta F_1}{\Delta l_1} + \text{etc.}}{j_0 + 2(j_1 + j_2 + \text{etc.})} = \frac{\Sigma \frac{\Delta F}{\Delta l}}{2\Sigma j};$$

$$\frac{aQ^2}{4g} = \frac{\frac{\Delta F_0}{j_0 + j_1} + \frac{\Delta F_1}{j_1 + j_2} + \text{etc.}}{\Delta l_0 + \Delta l_1 + \text{etc.}} = \frac{\Sigma \frac{\Delta F}{j_0 + j_1}}{l};$$

$$\frac{aQ^2}{4g} = \frac{\frac{\Delta F_0}{(j_0 + j_1)\Delta l_0} + \frac{\Delta F_1}{(j_1 + j_2)\Delta l_1} + \text{etc.}}{n} = \frac{1}{n}\Sigma \frac{\Delta F}{(j_0 + j_1)\Delta l};$$

ces diverses combinaisons donneraient sans doute des valeurs fort approchées pour $\frac{aQ^2}{4g}$, mais ces valeurs présenteraient, en général, des différences plus fortes que celle déduite de la première expression, qui est celle qu'il convient de préférer; en effet, la vraie valeur de $\Delta F$ étant $\int f dl = \frac{aQ^2}{4g}\int j dl$, sous cette forme on conçoit que $j$ ne puisse pas être séparé de $dl$ ou de $\Delta l$.

Nous remarquerons maintenant que l'équation. $\frac{aQ^2}{4g} = \frac{\Sigma \Delta F}{\Sigma (j_0 + j_1)\Delta l}$, lorsque $\Delta l$ est constant et égal à $\frac{l}{n}$,

peut se mettre sous la forme de $\frac{aQ^2}{2g} = \frac{2n}{\Sigma j} \times \frac{F}{l}$; mais $\Sigma j = \frac{\chi_0}{\omega_0^3} + 2\left(\frac{\chi_1}{\omega_1^3} + \frac{\chi_2}{\omega_2^3} + \text{etc.} + \frac{\chi_{n-1}}{\omega_{n-1}^3}\right) + \frac{\chi^n}{\omega_n^3}$ par conséquent $\frac{\Sigma j}{2n} = \frac{1}{n}\left(\frac{\chi_0}{\omega_0^3} + \frac{\chi_1}{\omega_1^3} + \text{etc.} + \frac{\chi_n}{\omega_n^3}\right) - \frac{1}{2n}\left(\frac{\chi_0}{\omega_0^3} + \frac{\chi_0}{\omega_n^3}\right)$, ce rapport $\frac{\Sigma j}{2n}$ est donc égal à la moyenne arithmétique des valeurs de $\frac{\chi}{\omega^3}$ diminuée d'une quantité égale à la 2 n^ième^ partie de la somme de la première et de la dernière valeur de $\frac{\chi}{\omega^3}$; chacune des valeurs de $\frac{\chi}{\omega^3}$ étant toujours fort petite, lorsque $\omega$ est plus grand que l'unité, il en résulte que la 2 n^ième^ partie de la somme de deux de ces valeurs pourra être négligée sans qu'il puisse en résulter d'erreur sensible. Si donc nous représentons la moyenne des valeurs de $\frac{\chi}{\omega^3}$ par $\frac{X}{\Omega^3}$, nous aurons, pour le courant à pente constante, qui sous une pente absolue égale à celle de la ligne des résistances, aurait un débit égal à celui du courant considéré, $\frac{F}{l} = I = \frac{aQ^2}{2g} \times \frac{X}{\Omega^3}$.

La quantité $\frac{aQ^2}{4g}$ est constante pour chaque courant, et sert à déterminer le débit à l'aide d'un nivellement et d'une série de sections; si nous continuons de la désigner par $N^2$ nous aurons $\frac{aQ^2}{4g} = N^2$ ou $Q = N\sqrt{\frac{4g}{a}}$; mais $\frac{4g}{a}$ est une quantité donnée et connue, toujours

égale à 5000 et par suite $\sqrt{\frac{4g}{a}}=70.71$. Le nombre N est donc tel qu'étant multiplié par 70.71, il donne le débit du courant auquel il se rapporte ; il joue ainsi un rôle important, et comme il est d'une grande utilité dans une foule de circonstances, nous proposons de lui affecter le nom de *norme* du courant afin de rappeler son importance.

147. L'équation $I=\frac{aQ^2}{2g}\times\frac{X}{\Omega^3}$ nous donne

$$Q=\sqrt{\frac{2g}{a}\times\frac{\Omega^3}{X}}\sqrt{I},\text{ mais }\frac{2g}{a}=2.500\text{ et }\sqrt{\frac{2g}{a}}=50,$$

si l'on représente par $p$ la pente par kilomètre, on aura $p=1000I$ et $\sqrt{I}=\sqrt{\frac{p}{31.63}}$ et par suite

$$Q=1.582\sqrt{\frac{\Omega^3}{X}}\times\sqrt{p}.$$

Lorsque le courant a une largeur moyenne considérable relativement à sa profondeur, si l'on désigne cette largeur par L on aura $\Omega=Lh'$ et l'on pourra remplacer $\frac{\Omega}{X}$ par $h'$ ce qui donnera $Q=1.582Lh'^{\frac{3}{2}}\sqrt{p}$.

L'expression du débit, que nous venons de trouver ne diffère que par le coefficient de la formule que les ingénieurs italiens ont établie pour déterminer le débit du Pô, laquelle se trouve rapportée dans la notice que M. Baumgarten a fait insérer dans le deuxième cahier des Annales des Ponts-et-Chaussées de 1847. Le coefficient des ingénieurs italiens est de

1.27, et est égal à $0.80 \times 1.582$, ce qui provient de ce que L, dans la formule des ingénieurs italiens, exprime la largeur de la section, tandis que dans la formule que nous venons de donner, L est seulement la largeur moyenne.

Quant à la pente $p$ par kilomètre, comme elle varie avec la forme du lit et la hauteur des crues, les ingénieurs italiens, après quelques observations, ont cru pouvoir adopter la formule empirique suivante $p = 0.115 - 0.00069h'^2$, formule toute spéciale et qui ne peut convenir qu'au point particulier du cours du Pô, où les observations ont été faites; mais lorsque l'on a le profil longitudinal d'un courant et un nombre suffisant de sections transversales, on peut se dispenser de tout empirisme; en effet, la pente absolue de la ligne des résistances, entre les points extrêmes, donnera la valeur de F, les aires et les contours des sections, prises à des distances égales, donneront ensuite la valeur de $\frac{\Omega^3}{X}$; les valeurs de F et de $\frac{\Omega^3}{X}$ étant les seules quantités nécessaires pour déterminer la norme, on parviendra facilement à connaître le débit. Une table des valeurs $\frac{X}{\Omega^3}$ calculées pour les différents courants naturels faciliterait singulièrement les calculs relatifs aux débits de ces courants; c'est dans cet esprit que nous donnons, à la fin du volume, la table n° 4.

Voici les résultats auxquels les ingénieurs italiens

sont parvenus en appliquant, à la détermination des débits du Pô, la formule $Q = 1.582 \times 0.80 L h'^{\frac{3}{2}} \sqrt{p}$.

Nous devons faire connaître que lors de l'extrême étiage, le débit du Pô était réduit à $186^m.00$.

Que lors de la plus grande crue, ce débit était de $5156^m.00$ ; il résulte de la formule que cette crue a dû s'élever à $9^m.03$ au-dessus du fond moyen.

| Hauteur de la section. | Débits calculés par la formule. | Débits mesurés directement. |
|---|---|---|
| 2.92 | 1111.02 | 1110.40 |
| 3.75 | 1638.73 | 1693.12 |
| 4.42 | 2165.67 | 2176.04 |
| 8.59 | 4779.06 | 4739.06 |

Les ingénieurs italiens appellent *module d'un courant* le débit moyen annuel qui est égal à la somme des débits journaliers divisés par $365 \times 86400 = 31536000$, ils ont ainsi trouvé que le module du Pô était de $1720^m.00$.

148. Lorsque la largeur d'un courant est considérable relativement à sa profondeur, nous avons vu qu'on pouvait se permettre de remplacer $\omega$ par $Lh^o$ et $\frac{\omega}{\chi}$ par $h^o$, ce qui change l'équation $Rf = ah_o$ en $fh^o = ah_o$, relation entre la pente de la ligne des résistances, la hauteur de la section et la hauteur due à la vitesse; comme cette relation est indépendante du débit et de l'aire de la section, elle convient à tous les points situés sur une même verticale et *fait* voir que lorsque la pente de la ligne des résistances est constante, il existe un rapport constant entre la hauteur de l'eau et la hauteur due à la vitesse.

Si au moment d'une crue, nous considérons une

des sections d'un courant, la ligne d'eau de cette section ne sera pas horizontale, elle sera concave ou convexe; comme tous les points de cette ligne quoique animés de vitesse différentes, suivent cependant des directions parallèles, on pourra lui appliquer la relation $h^0 f = ah_0$ et tracer la courbe qu'elle affecte, lorsqu'on connaîtra la forme de la section et la loi de variation de la vitesse.

Considérons une des sections d'un courant, en un point dont la pente de superficie soit de 0.0005, supposons que cette section ait $50^m.00$ de largeur et $1^m.00$ de profondeur en son milieu, mais que le fond de cette section soit concave et relevé de 0.30 vers les rives, admettons enfin que la vitesse sur les rives soit seulement les 0.80 de ce qu'elle est vers le centre, et que l'on désire connaître la profondeur de l'eau vers les rives; d'après les données qui précèdent les relations $\frac{h'}{h_1} = \frac{h^0}{h_0}$, $u_1 = 0.80 u_0$, donneront $h_1 = 0.64 h_0$ et par suite $h' = 0.64$; c'est-à-dire que la ligne d'eau présentera un bombement de 0.06 de flèche. Si le fond était plus concave, la ligne d'eau pourrait également être concave; mais cette courbure de la ligne d'eau, qui ne devient apparente que pour de fortes vitesses, est nécessairement comprise entre des limites très-resserrées, car si la pente transversale était beaucoup plus forte que la pente longitudinale, les filets du liquide s'écarteraient de l'axe pour se rapprocher de la ligne de plus grande pente,

et il arriverait alors ce que nous voyons journellement dans les ruisseaux des rues, où les filets partent des rives pour se porter vers l'axe.

149. Nous trouvons dans l'hydrotechnie de Funck les résultats d'un nivellement sur le Wéser et 105 sections prises sur une longueur de dix-sept kilomètres; les quatre-vingt-neuf premières de ces sections ont été levées en amont du double barrage de la ville de Hameln, sur une longueur de 12500$^{m}$.00; avec ces données nous avons pu déterminer la norme du Wéser et augmenter successivement le nombre des sections qui concourent à déterminer sa valeur; voici les résultats de ce travail, le nombre des sections étant sans cesse augmenté de cinq.

| Nombre des sections. | Valeur de la norme. | Débit correspondant. | Nombre des sections. | Valeur de la norme. | Débit correspondant. | Nombre des sections. | Valeur de la norme. | Débit correspondant. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 0.8973 | 63.45 | 35 | 0.9486 | 67.07 | 65 | 0.9519 | 67.31 |
| 10 | 0 9101 | 64.35 | 40 | 0.9374 | 66.28 | 70 | 0.9549 | 67.52 |
| 15 | 0 9317 | 65.88 | 45 | 0.9440 | 66.75 | 75 | 0.9564 | 67.63 |
| 20 | 0.9240 | 65.33 | 50 | 0.9428 | 66 66 | 80 | 0.9559 | 67.59 |
| 25 | 0.9395 | 66.43 | 55 | 0.9446 | 66.79 | 85 | 0.9578 | 67.73 |
| 30 | 0.9363 | 66.20 | 60 | 0.9481 | 67.04 | 88 | 0.9613 | 68.00 |

Le débit du Wéser, près de la ville de Hameln, au moment des opérations devait donc être de 68$^{m}$.00, les nombres donnés par Funck et qu'il a obtenus en mesurant directement la vitesse indiquant un débit compris entre 59$^{m}$.26 et 75$^{m}$.80.

La même méthode appliquée à des profils de l'Elbe a donné $456^m.38$, pour le débit de ce fleuve ; le débit mesuré a varié de $368^m.00$ à $436^m.00$.

Sur la Saône entre Saint-Symphorien et Verdun, la méthode a donné pour le débit $28^m.55$, le débit mesuré a été trouvé de $26^m.41$ pour cette partie ; mais M. Minard, qui donne ce résultat, fait aussi connaître que le débit de la même rivière, dans la partie comprise entre la Bèze et l'Ognon, a été trouvé de $28^m.00$ ; comme cette dernière partie est en amont de la première, si les jaugeages dont il s'agit ont été faits à la même époque, il est difficile de concevoir que la Saône ayant $28^m.00$ entre la Bèze et l'Ognon, n'ait plus que $26^m.41$ entre Saint-Symphorien et Verdun.

Sur la Moselle la méthode a donné $30^m.87$ dans une partie où des mesures directes ont fait trouver $30^m.53$.

Pour faciliter le genre de calcul dont nous venons de nous occuper, nous donnerons à la fin du volume sous le n° 4, une table des valeurs de $\frac{1}{\omega^2}$ et de $\frac{1}{\omega^3}$ pour tous les nombres compris entre 0 et 101 ; nous devons cette table à l'obligeance de M. Cousinery, auteur de plusieurs ouvrages sur la géométrie.

150. Occupons-nous actuellement de la question dont voici l'énoncé :

*Le débit d'un courant permanent étant connu, par un jaugeage fait avec soin, ainsi que les aires et les périmè-*

*tres de diverses sections dont les distances sont également connues, on désire déterminer la pente absolue* H *entre les deux sections extrêmes, et les pentes partielles* ΔH *entre deux sections voisines.*

Nous prendrons les données de l'application que nous allons faire, dans l'excellent mémoire que M. Vauthier a fait insérer dans le cinquième cahier des Annales des Ponts-et-Chaussées de 1836 ; cet exemple se rapporte à la Dordogne dont le débit était de $39^m.00$, ce qui donne pour la norme de cette rivière $N = \frac{39}{70.71} = 0.5514$ et $N^2 = \frac{aQ^2}{4g} = \frac{1521}{5000} = 0.3042$. Nous réunissons dans le tableau suivant les éléments et les résultats de cette application numérique.

| Quantités données. | | | Quantités calculées. | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Delta l$ | $\omega$ | $\chi$ | $\frac{1}{\omega^2}$ | $\frac{\chi}{\omega^3}$ | $\Delta l\left(\frac{\chi_0}{\omega_0^3}+\frac{\chi_1}{\omega_1^3}\right)$ | $\frac{2}{a}\left(\frac{1}{\omega_1^2}-\frac{1}{\omega_0^2}\right)$ | ΔH | déterminés par M. Vauthier |
| | 65.66 | 106.00 | 0.00023192 | 0.00037432 | | | | |
| 100.00 | | | | | 0.219548 | +0.108721 | 0.09987 | 0.09857 |
| | 59 00 | 108.10 | 0.00065746 | 0.00182116 | | | | |
| 100.00 | | | | | 0.440864 | +0.045413 | 0.14793 | 0.14279 |
| | 34 60 | 107.20 | 0.00083521 | 0.00258748 | | | | |
| 50.00 | | | | | 0.196964 | −0.063096 | 0.04072 | 0.03995 |
| | 41.23 | 94.75 | 0.00058825 | 0.00135180 | | | | |
| 65.00 | | | | | 0.1077915 | −0.089204 | 0.00565 | 0 00527 |
| | 64.67 | 82.90 | 0.00023910 | 0.00030653 | | | | |
| | | | | | | | 0.29417 | 0.28658 |

Nous avons trouvé $0^m.29417$, pour la pente absolue entre les points extrêmes, tandis que celle calculée par M. Vauthier est de $0^m.28658$ ; la différence $0^m.00759$ entre ces deux pentes, ne s'élevant pas à 8 millimètres, est tout à fait insignifiante.

Nous avons également calculé la pente du Wéser en admettant que son débit était de $68^m.00$, et nous avons trouvé $7^m.65$ pour la pente absolue des 17 kilomètres, sur lesquels se sont étendues les opérations, dont Funck a fait connaître les résultats ; le nivellement ayant donné $7^m.74$, c'est une différence de 9 centimètres entre la pente calculée et la pente mesurée; cette différence répartie sur les 17 kilomètres qui forment le développement de la partie considérée, confirme l'exactitude de la méthode, et nous devons ajouter que nous n'espérions pas atteindre à un tel degré de précision.

Nous avons encore déterminé la pente de l'Elbe, dont Funck fait connaître le nivellement et les sections dans une partie de 8 kilomètres d'étendue, et nous sommes parvenus à des résultats aussi précis, résultats faciles à vérifier puisque les données dont nous nous sommes servis se trouvent dans l'ouvrage de Funck publié depuis plus de trente ans.

151. Nous allons nous occuper d'une question qui ne paraît pas rentrer directement dans celles dont nous avons réuni les solutions dans le tableau du n° 143; en voici l'énoncé :

*Connaissant la forme et les dimensions du lit d'un courant, par un profil longitudinal et un certain nombre de sections transversales, dans chacune desquelles la hauteur de la ligne d'eau est indéterminée; connaissant de plus le débit constant de ce courant dans chaque unité de temps; connaissant encore, à l'extrémité d'aval, soit*

*l'aire de la section, soit la hauteur de l'eau, soit sa vitesse, soit seulement la pente de la ligne des résistances, on demande de déterminer la forme de l'axe hydraulique et les aires des autres sections.*

Nous croyons devoir faire observer qu'il ne suffirait pas de connaître soit l'aire, soit la hauteur, soit la vitesse relative à une section quelconque, pour déterminer l'axe hydraulique et les aires des autres sections ; en effet la section connue n'est en relation qu'avec les sections d'amont dont elle règle en quelque sorte la vitesse, tandis que rien de semblable n'a lieu vers l'aval, où des obstacles éloignés et des contrepentes du fond peuvent modifier le cours sans changer la forme du lit et les éléments de la section donnée. Lors donc que l'on ne connaît que la section d'amont de la partie du courant que l'on considère, la question proposée est, sinon insoluble, au moins indéterminée.

Avant de résoudre la question proposée, remarquons encore que la forme des sections étant donnée, si l'on connaît la hauteur $h^0$ de la dernière section, on calculera facilement l'aire $\omega_0$ de cette section ; de même si l'on connaît la vitesse moyenne $u_0$ de l'eau dans cette section, la relation $u\omega = Q$ donnera la valeur de $\omega_0$; enfin si l'on connaît la pente $f_0$ de la ligne des résistances, la relation $f_0 = \frac{aQ^2}{2g} \times \frac{\chi_0}{\omega_0^3}$ donnera la valeur de $\frac{\chi_0}{\omega_0^3}$ et comme la forme de la section est donnée on en conclura encore la valeur de $\omega_0$ ; quelle

que soit donc la donnée qui se rapporte à la dernière section, elle pourra toujours servir à déterminer l'aire de cette section que nous regarderons désormais comme connue.

Pour résoudre la question proposée nous avons $\Delta H' + (h' - h^\circ) = \left(\frac{f_\circ + f_{,}}{2}\right)\Delta l - (h_{,} - h_\circ)$; or la dernière section étant connue, tout ce qui s'y rapporte est nécessairement déterminé, on connaît donc $\omega_\circ$, $\chi_\circ$, $h^\circ$, $h_\circ$ et $f_\circ$, il n'y a d'inconnu que $\omega_{,}$, $\chi_{,}$, $h'$, $h_{,}$ et $f_{,}$; qui se rapportent à l'avant-dernière section, les relations $h_{,} = \frac{Q^2}{2g\omega_{,}^2}$, $f_{,} = \frac{aQ^2}{2g} \times \frac{\chi_{,}}{\omega_{,}^3}$ et $\frac{\omega'}{\chi} = R$, $\omega_{,} = f(h')$ permettent de réduire toute les inconnues à une seule, à $h'$ par exemple; après deux ou trois essais sur cette quantité on ne tarde pas à trouver la valeur de $h'$ qui satisfait à l'équation et qui détermine la hauteur de la ligne d'eau dans l'avant-dernière section; on procèdera de même pour obtenir la hauteur de l'eau dans la section qui précède et ainsi de suite pour les autres.

152. *Le lit d'un courant a une pente constante* $i = 0.000115$ *sur une longueur considérable, la forme des sections transversales est également constante et est telle que* $x$ *étant la profondeur d'une section quelconque, on a* $\chi = 70.07 + 4.48x$, $\omega = 60 + 70x + x^2$, *on connaît le débit du courant, dans chaque seconde, qui est* $Q = 40^m.00$, *on sait de plus que dans la section d'aval, la hauteur* $x = 1^m.70$; *on demande soit la valeur de* $x$ *qui correspond à une distance donnée, soit la longueur*

*ou la distance $\Delta l$ vers l'amont qui correspond à une hauteur donnée.*

Si, par exemple, on cherche la distance qui sépare la section donnée de celle qui est telle que $x=0.75$, on aura pour déterminer cette distance

$$i\Delta l+h'-h^{\circ}=\left(\frac{f_{\circ}+f_{,}}{2}\right)\Delta l+h_{\circ}-h_{,},$$

d'où on tirera $\Delta l=\frac{2(h^{\circ}+h_{\circ}-(h'+h_{,}))}{2i-(f_{\circ}+f_{,})}$, par les données de la question, on a $i=0.000115$, $\frac{aQ^2}{2g}=0.319$, $h^{\circ}=1.70$, $h'=0.75$, ce qui conduit à $\omega_{\circ}=184.78$, $\chi_{\circ}=77.69$, $h_{\circ}=0.00238$, $\frac{\chi_{\circ}}{\omega_{\circ}^3}=0.0000122$, $\omega_{,}=113.62$, $\chi_{,}=73.43$, $h_{,}=0.00681$, $\frac{\chi_{,}}{\omega_{,}^3}=0.00005$, enfin $f_{\circ}+f_{,}=0.0000198$ et $\Delta l=\frac{1.89214}{0.0002102}=9001$, par conséquent, sur le courant que nous considérons, une distance de $9001^{m}.00$ séparera la section, dont la hauteur est de $1^{m}.70$, de celle dont la hauteur est 0.75.

Puisque le lit du courant dont nous nous occupons a une pente constante et une section régulière, si l'eau n'était retenue par aucun obstacle, elle y prendrait un mouvement uniforme et une section constante et l'on aurait pour déterminer l'aire de cette section $i=\frac{aQ^2}{2g}\times\frac{X}{\Omega^3}$, d'où $\frac{\Omega^3}{X}=5554.8$, $\Omega=73.39$, $x=0.19$, $X=71.00$, $u=0.545$, $h=0.01514$; c'est-à-dire que si aucun obstacle ne gênait le libre

cours des eaux; le courant aurait une section dont l'aire constante serait de $73^m.39$, et dont la hauteur serait telle que la valeur de $x$ serait seulement de 0.19. Cette question a été traitée par M. Bélanger qui l'a résolue en procédant par petites distances, ce qui est long et inutile.

Déterminons maintenant à quelle distance de la section qui est telle que $x = 1^m.70$, la pente de la surface sera égale à celle du fond, ou encore à quelle distance de la section donnée l'effet de l'obstacle cesse de se faire sentir. Pour résoudre cette question nous avons la formule $\Delta l = \frac{2(h^o + h_o - (h' + h_,))}{2i - (f_o + f_,)}$, dans laquelle il faut faire $f_, = i$, en sorte qu'elle se réduit à $\Delta l = \frac{2(h^o + h_o - (h_, + h_,))}{i - f_o}$; nous savons d'ailleurs que l'on a $h^o + h_o = 1.70238$, $h' + h_, = 0.20514$, $f_o = 0.000008$; par conséquent,

$$\Delta l = \frac{2.994480}{0.000107} = 27936,$$

c'est-à-dire que c'est à cette distance en amont de la section donnée que le mouvement cesse d'être uniforme, ou que commence à se faire sentir l'effet de l'obstacle dont nous ignorons le genre, que nous savons seulement être situé à l'aval de la section donnée.

Dans les questions du genre de celle que nous venons de traiter, on a souvent à résoudre des équations de la forme $\frac{\chi}{\omega^3} = b$; à ce sujet, nous ferons

observer que, pour les courants à grande section, on peut facilement résoudre cette équation par les logarithmes, car la valeur de $\chi$ variant très-peu pour un petit accroissement de la hauteur, on peut, en prenant pour $\chi$ une valeur approchée, en conclure celle de $\omega$, puisque $l\omega = \frac{l\chi - lb}{3}$; cette valeur de $\omega$ sert ensuite à rectifier celle de $\chi$ s'il y a lieu.

153. *Un aqueduc à fond horizontal doit débiter, dans une seconde, un volume d'eau de* $0^m.80$, *pour alimenter un réservoir qui se trouve à* $4357^m.00$ *de l'origine de l'aqueduc; la section transversale de l'aqueduc a une forme constante de* $1^m.30$ *de largeur au plafond, avec des côtés d'une inclinaison de* $\frac{1}{32}$ *ou de* $0^m.03125$. *On demande à quelle hauteur il faudra que le niveau de l'eau s'élève à l'origine de l'aqueduc, pour que ce niveau, près de l'embouchure, se tienne à* $0^m.40$ *au-dessus du fond.*

La relation $\Delta H = \Delta H' + h^\circ - h'$ se réduit ici à $\Delta H = h^\circ - h'$, car, le fond étant horizontal, on a nécessairement $\Delta H' = o$; il vient donc

$$h^\circ - h' = \Delta l \frac{aQ^2}{4g}\left(\frac{\chi_0}{\omega_0^3} + \frac{\chi_1}{\omega_1^3}\right) + h_1 - h_0,$$

d'où
$$\Delta l = \frac{h^\circ + h_0 - (h' + h_1)}{\frac{aQ^2}{4g}\left(\frac{\chi_0}{\omega_0^3} + \frac{\chi_1}{\omega_1^3}\right)};$$

équation qui fera connaître la distance qui sépare la section donnée d'une autre section qui devra en être très-proche, car la faible hauteur de la section don-

née indique que la surface doit avoir une forte courbure, puisque le fond du canal est horizontal.

Si l'on prend $h^\circ - h' = 0.30$, on déterminera pour $\Delta l$ des valeurs successives, et l'on continuera jusqu'à ce que leur somme soit égale ou surpasse 4357; la somme des différences $h^\circ - h'$, ajoutée à $0^m.40$, donnera la hauteur cherchée. D'après les données de la question, on a $Q=0.80$, $\chi=1.30+2.001x$, $\omega=(1.30+0.03125x)x$, on en conclut

$$\frac{aQ^2}{4g}=0.0001277,$$

et l'on peut ensuite facilement dresser le tableau suivant :

| Quantités données. | | | | Quantités calculées. | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Delta h'$ ou $h^\circ - h'$ | $h'$ | $\chi$ | $\omega$ | $h_{,}$ | $\frac{\chi}{\omega^3}$ | $\Delta l$ | $l$ |
| | 0.40 | 2.101 | 0.525 | 0.11823 | 14.512 | | |
| 0.30 | | | | | | 96.95 | |
| | 0.70 | 2.701 | 0.925 | 0.03814 | 3.451 | | 96.95 |
| 0.30 | | | | | | 453.22 | |
| | 1.00 | 3.301 | 1.331 | 0.01841 | 1.400 | | 530.17 |
| 0.30 | | | | | | 1071.59 | |
| | 1.30 | 3.901 | 1.743 | 0.01074 | 0.736 | | 1621 71 |
| 0.30 | | | | | | 1963.15 | |
| | 1.60 | 4.501 | 2.160 | 0.00698 | 0.446 | | 3584.86 |
| 0.10 | | | | | | 935.37 | |
| | 1.70 | 4.701 | 2.300 | 0.00613 | 0.384 | | 4520.23 |

La hauteur cherchée se trouve donc comprise entre $1^m.60$ et $1^m.70$, on reconnaît facilement qu'elle est de $1^m.683$; MM. Vauthier et Bélanger, qui ont

traité la même question, ont trouvé que la hauteur cherchée devait être de $1^m.67$; la faible différence avec celle que nous avons trouvée est de $0^m.013$ et provient de la formule dont ils ont fait usage.

Pour résoudre les questions analogues à celles que nous venons de traiter, on peut aussi se servir de l'équation du n° 122, mais il ne faut pas croire que les calculs soient moins longs et plus faciles; rarement, d'ailleurs, on pourra supposer la largeur de la section constante, et alors l'équation du n° 122 cesse d'être applicable, tandis que l'équation aux différences, dont nous venons de faire usage, est toujours exacte, quelle que soit la forme de la section, il faut seulement réduire les différences lorsque l'on s'aperçoit que la surface doit avoir une forte courbure.

L'équation du n° 122, lorsqu'on y fait $Y = 1^m.70$, donne $l = 4712$, et, lorsqu'on y fait $Y = 1^m.60$, elle donne $l = 3813$, nombres qui sont un peu plus considérables que ceux qui résultent de l'équation aux différences.

Il convient d'ailleurs de faire observer que les questions de ce genre sont parfois insolubles; en effet, lorsque le fond d'un canal est horizontal, l'eau qu'il contient ne peut se mouvoir que quand, vers l'aval, elle se déverse par-dessus un barrage, ou s'échappe par une ouverture ménagée sur le fond ou sur les côtés, ou enfin parce que le fond cesse d'être horizontal.

Dans ces diverses circonstances, la section qui correspond au seuil du barrage ou de la chute, ou au changement de pente, ne peut jamais avoir une hauteur moindre que la valeur de $h'$ tirée de la relation $\frac{h'}{2} = \frac{Q^2}{gL^2}$. Si donc la hauteur donnée était plus petite que cette valeur, la question serait insoluble.

Dans la question qui vient de nous occuper, il eût donc été convenable de commencer par déterminer la hauteur qui correspond au seuil du déversement ; cette hauteur étant connue et plus petite que la hauteur donnée, on aurait pu s'occuper de déterminer la hauteur que doit avoir la section qui correspond à la section donnée.

(4) Questions du deuxième ordre, relatives aux courants permanents et découverts à lit régulier ou irrégulier.

154. Quel que soit le lit d'un courant, qu'il soit régulier ou irrégulier, dès le moment que l'on altère la forme et la surface de l'une ou de plusieurs sections de ce lit, le mouvement de l'eau, qui ne peut perdre sa permanence, devient nécessairement varié s'il était primitivement uniforme, et si déjà il était varié, son mode de variation change sur l'étendue dans laquelle les effets de la modification se font sentir ; la régularité du lit perdant ici toute son importance, nous ne traiterons pas à part les questions qui s'y rapportent.

Nous savons déjà que les diverses modifications

que l'on peut faire subir au lit d'un courant proviennent toujours des altérations qu'éprouvent l'une ou plusieurs de ses sections; on doit donc distinguer deux sortes de modifications, les premières sont produites par une altération faite à plusieurs sections consécutives se rapportant à une petite longueur du lit; les modifications de la deuxième sorte sont produites par l'altération faite à une suite de sections prises sur une longueur considérable.

Les modifications de la première sorte peuvent être graduelles, elles peuvent aussi être brusques; dans ce dernier cas, leurs effets peuvent se faire sentir à une grande distance vers l'amont; ces effets se reconnaissent à une forte augmentation dans la courbure de la surface du courant, et quelquefois à une interruption dans la continuité de cette courbure. La partie du courant où ces effets se font le plus sentir, se trouve toujours près des sections où la modification a été faite, et principalement à l'amont; ils ont moins d'étendue vers l'aval; cependant, dans cette partie, on remarque souvent des tourbillons ou remous et des bouillonnements qui produisent un véritable désordre dans le cours et le régime du courant, désordre qui heureusement n'a lieu que sur une petite longueur. Dans la partie d'amont, la courbure est généralement faible et presque régulière, et ne perd sa continuité que dans des circonstances accidentelles.

Les modifications de la deuxième sorte ne produi-

sent rien de semblable; la courbure de la surface, qui est rarement considérable, ne cesse pas d'être continue, et la pente de superficie n'éprouve d'altérations que vers les extrémités de la partie modifiée.

Lorsqu'on entreprend de modifier le lit d'un courant naturel, les deux sortes de modifications dont nous venons de parler doivent toujours avoir pour objet de changer avantageusement le régime de ce courant, et de lui en donner un qui favorise les intérêts de l'agriculture, ceux de l'industrie ou ceux de la navigation, et souvent ces trois intérêts à la fois.

Occupons-nous d'abord des effets qui sont dus aux modifications graduelles de la première sorte, à celles qui proviennent de l'altération, sur une faible longueur, de la section d'un courant; nous nous occuperons ensuite des effets qui sont dus aux modifications de la deuxième sorte, à celles qui proviennent de l'altération sur une longueur, qui peut être considérable, d'un certain nombre de sections consécutives. Nous réserverons pour la fin les effets produits par une brusque altération de l'une des sections d'un courant, tels que ceux qui résultent de la construction d'un pont, d'un pertuis, d'un barrage, d'une chute du fond, d'un brusque changement de pente, etc.

§ 1. Effets des altérations graduelles qu'éprouve, sur peu de longueur, la section d'un courant.

155. Nous savons que les altérations que peut éprouver la section d'un courant se réduisent toujours à deux, qui sont une diminution ou une augmentation de l'aire de cette section.

Nous savons encore que la diminution peut être le résultat du rapprochement des parois latérales, ou provenir du relèvement du fond et quelquefois de ces deux causes agissant ensemble.

De même, l'augmentation de section peut provenir d'un écartement des parois latérales ou d'un abaissement du fond, et quelquefois de ces deux causes agissant ensemble.

La diminution graduelle qui provient d'un rétrécissement de la section, produit en amont un relèvement du niveau de l'eau qui est rarement considérable. Ce relèvement a pour effet d'augmenter la pression et la vitesse dans la section réduite, afin que le débit du courant puisse y passer dans le même temps.

La diminution graduelle, qui provient d'un exhaussement du fond, peut produire en amont un relèvement du niveau de l'eau sur une étendue qui est quelquefois considérable; ce relèvement est nécessaire pour que le liquide puisse franchir le seuil ou l'obstacle qui réduit la section.

A l'aval de la section réduite, le liquide perdant

l'excès de force vive qu'il avait acquise, il se produit assez fréquemment un relèvement en sens contraire du premier; ce relèvement, dû à une réduction de vitesse, ne modifie la surface du courant que sur une petite longueur, et après quelques ondulations, le niveau de l'eau n'éprouve aucun changement. Entre les deux relèvements, au passage même de la section modifiée, la surface du courant ne peut conserver son niveau primitif; suivant les circonstances, cette surface est élevée ou abaissée.

L'augmentation graduelle de l'aire de l'une des sections d'un courant, lorsqu'elle provient d'un élargissement, produit souvent, dans l'emplacement même de la section, un relèvement même de la surface sur une faible longueur; elle peut aussi produire un abaissement, mais nous aurons occasion de reconnaître que ce dernier état n'est pas stable.

Lorsque l'augmentation graduelle de la section provient d'un approfondissement, elle produit peu d'effet sur la surface du courant; mais il en est tout autrement lorsque l'approfondissement doit se continuer ou lorsqu'il est le résultat d'une chute plus ou moins brusque que présente le fond.

156. Occupons-nous de l'effet produit par une augmentation ou une diminution de largeur de l'une des sections d'un courant; augmentation ou diminution opérée graduellement sur une faible longueur; supposons d'abord, pour simplifier, que la pente du lit soit constante et égale à $i$, et que, sauf

dans la partie modifiée, la section ait une forme constante, en sorte qu'avant et après cette partie, le mouvement soit uniforme.

Considérons ensuite la section où la modification est la plus grande, section dans laquelle on connaît le fond, la largeur et la forme, mais dans laquelle la hauteur et la vitesse sont à déterminer, soient $\omega_{,}$, $\chi_{,}$, $h'$, $h_{,}$ et $L_{,}$ les éléments de cette section, laquelle est séparée de la première par une distance $\Delta l$ qui est aussi à déterminer, mais qui ne peut différer beaucoup de l'étendue sur laquelle le lit est modifié vers l'amont.

L'équation générale $dh' + dh = (i - f)dl$, lorsque l'on peut passer des différentielles aux différences en remplaçant $\int f dl$ par $(f_0 + f_{,})\frac{\Delta l}{2}$, devient

$$h' + h_{,} - (h^0 + h_0) = \left(i - \frac{(f_0 + f_{,})}{2}\right)\Delta l_0,$$

et, comme le mouvement est encore uniforme au passage de la section $\omega_0$, on a nécessairement $f_0 = i$, en sorte qu'il reste $h' + h_{,} - (h^0 + h_0) = (i - f_{,})\frac{\Delta l_0}{2}$. Lorsque $\Delta l$ est peu considérable, ainsi que cela a lieu dans la circonstance qui nous occupe, la quantité qui forme le second membre de cette équation sera toujours fort petite, et, en négligeant cette quantité, il restera $h^0 + h_0 = h' + h_{,}$, relation à l'aide de laquelle on obtiendra une première approximation de la valeur de $h'$; en effet, le mouvement étant per-

manent, on a $h_{,} = \frac{Q^2}{2g\omega_{,}^2} = \frac{e}{\omega_{,}^2}$; en remplaçant, pour plus de simplicité, $\frac{Q^2}{2g}$ par $e$, on aura donc

$$h' + \frac{e}{\omega_{,}^2} = h^0 + h_0;$$

$\omega_{,}$ étant une fonction de $h'$, $h^0$ et $h_0$ étant des données de la question, il en résulte que l'on obtiendra une première valeur pour $h'$ qui permettra de déterminer $f_{,}$, et, par suite, la quantité négligée $(i - f_{,})\frac{\Delta l_0}{2}$; on pourra donc rectifier la valeur de $h'$, et obtenir cette quantité avec toute l'exactitude nécessaire.

Si la section du courant est rectangulaire et que $L_{,}$ soit la largeur de la section où la modification est le plus considérable, on aura $\omega_{,} = L_{,}h'$, et par suite,

$$h' = \frac{h_0 + h^0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{h^0 + h^0}{2}\right)^2 - \frac{e}{L_{,}^2 h'}};$$

d'où il résulte que $h'$ aura deux valeurs positives et une valeur négative qui ne se rapporte pas à la question que nous traitons; les deux valeurs positives seront égales entre elles et à $\frac{h^0 + h_0}{2}$, toutes les fois que la quantité, sous le radical, sera nulle, ce qui exige que l'on ait $h'\left(\frac{h^0 + h_0}{2}\right)^2 = \frac{e}{L_{,}^2}$, c'est-à-dire que, dans cette circonstance, il doit exister entre les données de la question, la relation $\left(\frac{h^0 + h_0}{2}\right)^3 = \frac{e}{L_{,}^2}$ ou

$$L_{,} = \sqrt{\frac{e}{\left(\frac{h^0 + h_0}{2}\right)^3}}.$$

157. Lorsque la hauteur $h'$ de la section modifiée est connue, l'équation

$$h' + h_1 - (h'' + h_2) = \left(i - \frac{f_1 + f_2}{2}\right)\Delta l_1$$

servira à déterminer les autres points du nouvel axe hydraulique dans la partie dont la section a été modifiée; on arrivera ainsi à la dernière section dont la hauteur $h^n$ doit encore présenter une différence $r$ avec la hauteur primitive qui, dans la question qui nous occupe, est celle du régime uniforme $h^0$; cette hauteur $h^n$ est ainsi égale à $h^0 \pm r$. Pour connaître la partie modifiée dans toute son étendue, il ne reste donc plus à trouver que la distance $\Delta l_n$, à l'extrémité de laquelle le nouvel axe hydraulique se raccorde avec la ligne de pente du régime uniforme; pour déterminer cette distance, on a $\Delta H_n = \frac{(I_n + i)}{2}\Delta l_n = i\Delta l_n \pm r$, ce qui donne $\Delta l_n = \frac{\pm 2r}{i - I_n}$.

Lorsque le courant, dans son état primitif, a un mouvement varié, il faut avoir recours à l'équation

$$h' + h_1 - (h^0 + h_0) = \Delta H' - (f_0 + f_1)\frac{\Delta l}{2},$$

qui donnera soit la hauteur d'une section située à une distance connue d'une section donnée, soit la distance qui sépare deux sections données; il convient d'ailleurs d'avoir l'attention de ne procéder que par petites distances, lorsque l'on pense que l'axe hydraulique peut présenter des accidents de cour-

bure, tels que points d'inflexion, points de rebroussement, points *maxima* ou *minima*, ou seulement lorsque cet axe a une forte courbure.

158. Un canal à pente constante de $0^m.0244$, et à section rectangulaire de $0^m.20$ de largeur aussi constante, présente un élargissement graduel sur $2^m.00$ de longueur, qui porte sa largeur à $0^m.40$, puis un rétrécissement graduel sur une longueur aussi égale à $2^m.00$; le canal reprend ensuite sa largeur de $0^m.20$, qu'il conserve indéfiniment; on sait d'ailleurs que le débit est de $0^m.0683$, et que la hauteur du régime uniforme est, par conséquent, de $0^m.173$; on demande de déterminer la courbure qu'affectera l'axe hydraulique, non-seulement sur l'étendue de la partie modifiée, mais en deçà et au delà, entre deux sections dont le niveau n'a pas varié.

Nous avons trouvé dans le n° 156, qu'une valeur très-approchée de la hauteur de la section modifiée avait pour expression $h' = \frac{h^\circ + h_0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{h^\circ + h_0}{2}\right)^2 - \frac{e}{L_1^2 h'}}$; cette expression, dans la question qui nous occupe, donne, après quelques essais, deux valeurs positives pour $h'$, l'une plus petite que $h^\circ$ et l'autre plus grande; la plus petite valeur est $h' = 0.0703$, et la plus grande est $h' = 0.360$; par conséquent, au moyen d'un élargissement de section on pourra obtenir à volonté soit un abaissement de la surface du courant, soit un relèvement de la même surface; l'abaissement aura

toujours lieu, lorsqu'à une certaine distance à l'aval de la section modifiée, l'écoulement de l'eau sera favorisé, soit par une augmentation de la pente du lit, soit par une chute ou une ouverture ménagée dans le fond. Le relèvement aura toujours lieu lorsque l'écoulement de l'eau sera contrarié par un obstacle tel qu'un barrage, un rocher, une île, etc.

Des expériences faites par M. Vauthier confirment les résultats auxquels nous venons de parvenir; ce savant ingénieur a reconnu qu'en faisant arriver l'eau dans le canal sans précipitation, la surface du courant dans la partie élargie s'abaisse au-dessous de la surface primitive, et la hauteur sur le fond est souvent moindre que la moitié de la hauteur du régime uniforme qui correspond au même débit. Il a encore reconnu qu'en introduisant avec précipitation l'eau dans le canal, il se produit dans la partie élargie, un brusque relèvement de la surface du courant au-dessus de la surface primitive; la hauteur de ce relèvement croît rapidement, toutes choses égales d'ailleurs, avec la vitesse du courant dans la partie d'amont. La forme et l'amplitude du relèvement peuvent se déterminer par points, au moyen de la formule générale $dh' + dh = (i - f)dl$; on trouve ainsi qu'au point où la section commence à s'élargir, la section passe, sur une petite longueur, de la hauteur $0^m.173$ à la hauteur $0^m.3059$, qu'à $1^m.00$ de ce point la section atteint sa hauteur maxima qui est de $0^m.375$, qu'au point où l'élargissement est le plus

considérable la hauteur est encore de 0.36, qu'au point où la section reprend sa largeur constante de $0^m.20$, la hauteur est réduite à $0^m.25$, qu'à $8^m.28$ de ce point la hauteur de la section n'est plus que de $0^m.1815$, enfin qu'à $10^m.00$ de ce dernier point, l'axe hydraulique du relèvement se raccorde avec l'axe hydraulique primitif, en sorte que l'amplitude totale du relèvement est de $22^m.15$.

159. Lorsqu'il s'agit de l'effet produit par un rétrécissement de section, l'expression

$$h' = \frac{h^\circ + h_\circ}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{h^\circ + h_\circ}{2}\right)^2 - \frac{e}{L_{,}^2 h'}}$$

sert également à déterminer une valeur approximative de la hauteur de la section modifiée; $h'$ est encore ici susceptible d'avoir deux valeurs positives, l'une plus grande, l'autre plus petite que la valeur moyenne $\frac{h^\circ + h_\circ}{2}$; mais il ne faut pas se presser d'en conclure que dans le cas du rétrécissement comme dans celui de l'élargissement, on peut obtenir à volonté soit un relèvement de la surface du courant, soit un abaissement de la même surface, car le facteur $\frac{e}{L_{,}^2}$ étant plus grand, dans le cas du rétrécissement, il en résulte que la quantité, $\sqrt{\left(\frac{h^\circ + h_\circ}{2}\right)^2 - \frac{e}{L_{,}^2 h'}}$ sera nécessairement plus petite, et que les deux valeurs de $h'$ seront généralement plus petites que $h^\circ$, en sorte que le rétrécissement donnera fréquemment

lieu à deux abaissements différents. En général, il n'y aurait ni relèvement ni abaissement si la section étant modifiée, l'on pouvait avoir $L_{,}^2h' = L^2h^o$; il y aurait abaissement si l'on avait $L_{,}^2h' < L^2h^o$, et relèvement dans le cas contraire.

160. Dans les courants naturels tels que les rivières et les fleuves, les relèvements et abaissements dont nous venons de nous occuper seront rarement sensibles; pour le démontrer, remarquons d'abord que la relation $h' + h_{,} = h^o + h_o$ fait reconnaître que $h'$ sera toujours plus petit que $h^o + h_o$, car quelque petite que soit la valeur de $h_{,}$, elle ne sera jamais nulle; $h^o + h_o$ est donc la limite supérieure des valeurs que puisse avoir $h'$, et par suite la hauteur du relèvement ne doit jamais atteindre la valeur de $h_o$; or, dans les courants naturels autre que les torrents, la vitesse moyenne, qui correspond à une section quelconque, dépasse rarement $3^m.00$, ce qui donne $h_o = 0.4588$; il résulte de là, que dans les courants naturels la hauteur des relèvements causés par des élargissements de section, doit rarement dépasser $0^m.40$ et être en général comprise entre $0^m.30$ et $0^m.40$.

Pour donner une idée des effets les plus considérables que puissent produire les élargissements et les rétrécissements de section, considérons un courant débitant $7000^m.00$ cubes par seconde dans un lit régulier, dont la section a $160^m.00$ de largeur, sur $9^m.40$ de hauteur, ayant par conséquent $1504^m.00$ de surface, et par suite une vitesse moyenne de $4^m.65$;

supposons que l'on augmente d'un quart la largeur de cette section, ou que l'on porte cette largeur à $200^m.00$ et que l'on désire connaître la hauteur du relèvement que cet élargissement doit occasionner. Après deux ou trois essais, on trouvera facilement que la hauteur de la section modifiée sera de $9^m.88$, et que la hauteur du relèvement sera par conséquent de $0^m.48$.

Si au lieu d'augmenter d'un quart la largeur de la section on voulait diminuer cette largeur d'un quart ou la réduire à $120^m.00$, on trouverait alors que la plus grande hauteur de la section modifiée serait de $9^m.015$ et par conséquent que le rétrécissement donnerait lieu à un abaissement de $0^m.385$ au-dessous de la surface primitive.

### § 2. Effets des altérations graduelles qu'éprouve sur une grande longueur la section d'un courant.

161. Les modifications que peut éprouver le lit d'un courant se réduisent presque toujours à une altération de la forme ou des dimensions des sections, altération qui produit nécessairement une augmentation ou une diminution de l'aire de ces sections et par conséquent un changement plus ou moins sensible dans la courbure de l'axe hydraulique. La question la plus générale que l'on puisse se proposer, sur ces modifications, est donc la suivante :

*Connaissant le lit d'un courant par un profil longitudinal et un certain nombre de sections transversales,*

*connaissant de plus le volume d'eau que ce courant doit débiter dans un temps donné, on se propose de modifier, en largeur et en profondeur, un certain nombre de sections consécutives, l'on demande de déterminer le nouvel axe hydraulique et la nouvelle ligne des résistances.* On admet d'ailleurs que les nouvelles sections sont raccordées de manière que le passage d'un rétrécissement à un élargissement et réciproquement ait toujours lieu d'une manière graduelle, afin d'éviter les changements brusques qui occasionnent toujours une perte de force vive.

Pour déterminer le nouvel axe hydraulique, on part ordinairement de l'une des sections dont le niveau ne doit pas varier, ou ne doit varier que d'une quantité donnée. Nous partirons ici de l'une des sections situées vers l'aval qui n'ayant pas été modifiée doit conserver le même niveau.

Désignons toujours par $h^{\circ}$, $h_0$, $f_0$, les hauteurs et la pente qui se rapportent à la section $\omega_0$, par $h'$, $h_1$, $f_1$, les quantités analogues qui se rapportent à la section $\omega_1$, située à la distance connue $\Delta l_0$ de la première; désignons encore par $j_0$ la quantité $\frac{\chi_0}{\omega_0^2}$, par $j_1$ la quantité $\frac{\chi_1}{\omega_1^2}$, etc., soient maintenant $\Delta H'$, la pente connue du fond entre ces deux sections, et $\Delta H_0$ la pente absolue de superficie à déterminer entre les mêmes sections.

Les quantités qui se rapportent à la section $\omega_0$ étant connues, on déterminera celles qui se rappor-

tent à la section $\omega_{,}$, par la relation,

$$\Delta H_{\circ} = N^2(j_{\circ} + j_{,})\Delta l_{\circ} + h_{\circ} - h_{,} = \Delta H' + h' - h^{\circ},$$

dans lesquelles il n'y a d'inconnues que $j_{,}$ et $h' + h_{,}$. Pour trouver une valeur approchée de $h' + h_{,}$, nous supposerons d'abord pour $j_{,}$, soit une valeur égale à $j_{\circ}$, soit une valeur moyenne que nous apprendrons à déterminer, on obtiendra ainsi une valeur approchée pour $h' + h_{,}$, qui permettra de rectifier celle de $j_{,}$ et de trouver la valeur exacte de $h' + h_{,}$.

La section $\omega_{,}$ étant ainsi connue, on passera à la section $\omega_2$ qui se trouve à la distance $\Delta l_{,}$, vers l'amont de la section $\omega_{,}$, puis l'on déterminera la hauteur $h'' + h_2$, comme on aura déterminé celle de $h' + h_{,}$; en continuant ainsi on obtiendra de proche en proche tous les autres points de la ligne des résistances et par conséquent ceux du nouvel axe hydraulique; on rapportera ensuite cet axe sur le profil longitudinal et l'on déterminera ses points d'intersection avec l'ancien.

Nous venons de parler d'une valeur moyenne pour $j$ dont il convient de faire usage dans les différents essais qu'on est obligé de faire, nous allons donner ici le moyen de trouver cette valeur moyenne, pour cela reportons-nous au n° 147, nous aurons

$$H = 2N^2 l \frac{\Sigma j}{n} + h_n - h_{\circ} = H' + h^{\circ} - h^{n},$$

d'où nous tirerons, pour la valeur moyenne de $j$,

$$\frac{\Sigma j}{n}=\frac{H'+h^{o}+h_{o}-(h^{n}+h_{n})}{2N^{2}l}.$$

Lorsque la quantité $j$ restera constante, la ligne des résistances aura une pente constante ; quant à la pente absolue de l'axe hydraulique, elle est déterminée par la relation $H=2N^{2}l\frac{\Sigma j}{n}+h_{n}-h_{o}$; si cette pente pouvait être constante, on aurait

$$I=2N^{2}\left(\frac{\Sigma j}{n}+\frac{h_{n}-h_{o}}{2N^{2}l}\right),$$

expression dans laquelle $\frac{\Sigma j}{n}+\frac{h_{n}-h_{o}}{2N^{2}l}$ devrait conserver la même valeur quelles que soient celles de $n$, $l$, $j$, $h_{n}$ et $h_{o}$; cela aura lieu toutes les fois que $j$ sera constant, et que l'on aura $h^{n}=h_{o}$ ; dans ce cas la pente sera constante et le mouvement uniforme; dans toute autre circonstance il arrivera rarement que la pente soit constante lorsque le mouvement sera varié.

162. Après la question que nous venons de traiter, une des plus importantes que l'on puisse proposer sur les rivières est la suivante :

*Améliorer dans l'intérêt de la navigation ou dans un intérêt industriel, le cours d'une rivière au moment de l'étiage, soit en augmentant la hauteur de ses eaux, soit en rectifiant son lit, soit par l'une et l'autre de ces modifications, et faire en sorte que ces modifications ne relèvent pas le niveau des crues au moment du débit de plein bord et par conséquent celui des crues de débordement.*

Cette question qui paraît fort compliquée peut se résoudre d'une manière assez simple, ainsi que nous allons le faire voir.

Soient $\omega_0$, $\chi_0$, $h^0$ et $h_0$, les éléments d'une section située ves l'aval de la partie à améliorer, dont le niveau au moment des basses eaux doit rester le même avant et après l'exécution des travaux, $\omega_{,}$, $\chi_{,}$, $L_{,}$, $h'$ et $h_{,}$, les éléments d'une section située à une faible distance à l'amont de la précédente.

Soient encore $\Delta l_0$ la distance qui sépare les deux sections, $\Delta H^0$ la pente absolue du fond entre les mêmes sections, $N^2$ la norme de la rivière au moment des basses eaux.

Nous admettrons que l'on connaisse aussi la hauteur $h'$, que la section $\omega_{,}$ doit avoir après l'exécution des travaux, ce qui revient à supposer que l'on s'est donné le nouvel axe hydraulique, on pourrait se donner tout autre élément de la section, tel que la largeur, le contour, la surface, la hauteur due à la vitesse; nous avons préféré la hauteur parce que dans les questions relatives à la navigation, c'est ordinairement la hauteur que les travaux ont pour objet de régler. La hauteur étant donc supposée connue on aura pour déterminer la largeur moyenne $L_{,}$,

$$h'-h^0+\Delta H^0=N^2\left(\left[\frac{\chi_0}{\omega_0^{03}}+\frac{\chi_{,}}{L_{,}^3h'^3}\right]\Delta l_0+\frac{2}{a}\left[\frac{1}{\omega_0^2}-\frac{1}{L_{,}^2h'^2}\right]\right).$$

La largeur $L_{,}$ étant connue on réglera les travaux

à faire au-dessous des basses eaux, entre les deux sections, pour que la section $\omega_{,}$ ait la hauteur $h'$; après cette première opération, il faudra déterminer les ouvrages à exécuter au-dessus des basses eaux pour que le niveau des crues de plein bord n'éprouve aucun relèvement, ou pour que cette crue conserve la même pente absolue.

Pour cela, soient $\Omega_0$ et $X_0$ l'aire et le contour de la section d'aval au moment de la crue de plein bord, $\Omega_{,}$ et $X_{,}$ l'aire et le contour de la section d'amont à la même époque, quantités qui sont à déterminer, $N'$ la norme de la crue de plein bord, $\Delta H_0$ la pente absolue de superficie que cette crue avait avant l'exécution des travaux et qu'elle doit encore avoir après, on aura pour déterminer $\Omega_{,}$

$$\Delta H_0 = N'^2\left(\left[\frac{X_0}{\Omega_0^2}+\frac{X_{,}}{\Omega_{,}^2}\right]\Delta l_0+\frac{2}{a}\left[\frac{1}{\Omega_0^2}-\frac{1}{\Omega_{,}^2}\right]\right).$$

La valeur de $\Omega_{,}$ étant déterminée on règlera facilement les travaux à faire au-dessus des basses eaux pour satisfaire à la seconde des conditions sus-énoncées.

Si $_{,}\Omega$ et $_{,}X$ sont l'aire et le contour de la section d'amont au moment de la crue de plein bord, avant l'exécution des travaux, on doit encore avoir

$$\Delta H_0 = N'^2\left(\left[\frac{X_0}{\Omega_0^2}+\frac{{}_{,}X}{{}_{,}\Omega^2}\right]\Delta l_0+\frac{2}{a}\left[\frac{1}{\Omega_0^2}-\frac{1}{{}_{,}\Omega^2}\right]\right).$$

Cette équation retranchée de la précédente donne pour la relation qui doit exister entre l'ancienne et

la nouvelle section

$$N'^2 \Delta l_0 \left( \frac{X_{,}}{\Omega_{,}^3} - \frac{{}_{,}X}{{}_{,}\Omega^3} \right) - \frac{2}{a} \left( \frac{1}{\Omega_{,}^2} - \frac{1}{{}_{,}\Omega^2} \right) = 0,$$

laquelle pourra également servir à déterminer la valeur de $\Omega_{,}$.

En continuant d'opérer ainsi de proche en proche, on parviendra à reconnaître et à régler les ouvrages à effectuer pour améliorer la partie de rivière dont on s'occupe.

Nous ne ferons point d'application numérique des questions que nous venons de traiter, parce que les données nous manquent; les calculs, qui n'ont rien de difficile, sont d'ailleurs trop longs pour que nous puissions nous résoudre à les faire sur des données prises arbitrairement et sans utilité réelle.

### § 3. Effet d'un élargissement brusque de la section d'un courant.

163. Lorsque dans un courant le liquide affluent vient frapper un liquide animé d'une vitesse moindre, il perd dans ce choc une partie de la vitesse qu'il possède, et celle qu'il conserve sert à maintenir la permanence du mouvement. Si nous admettons que les vitesses, avant et après le choc, restent parallèles, et que nous considérions la section du courant qui précède les variations du niveau de l'eau et la première de celles qui éprouvent une augmentation brusque de surface, ces deux sections étant très-rapprochées nous pourrons négliger la résistance due

au frottement sur le petit intervalle qui les sépare. Si M est la masse que débite le courant dans l'unité de temps, $\omega_0$ l'aire de la section d'amont, $u_0$ la vitesse qui correspond à cette section, $h_0$ la hauteur due à cette vitesse, $h^0$ la hauteur de la section ; si $\omega_{,}$, $u_{,}$, $h'$ et $h'$ sont respectivement les quantités analogues qui conviennent à la section d'aval, à celle où le relèvement atteint sa plus grande hauteur, enfin si la pente absolue de la surface entre les deux sections est désignée par H, alors $\frac{Mu_0^2}{2}$ sera la force vive que possède le liquide au passage de la section d'amont, $MgH$ sera la quantité d'action que la pesanteur imprimera ou absorbera entre les deux sections, suivant que la surface présentera un abaissement ou un relèvement ; les vitesses $u_0$ et $u_{,}$ étant parallèles et agissant dans le même sens, la force vive que le liquide perdra par l'augmentation de l'aire de la section ou par le choc contre un liquide animé d'une vitesse moindre, sera $\frac{M(u_0-u_{,})^2}{2}$. Lorsque le liquide passe par la section modifiée, sa force vive est donc réduite à $\frac{Mu_0^2}{2} \pm MgH - \frac{M(u_0-u_{,})^2}{2}$, et comme cette quantité doit être égale à $\frac{Mu_{,}^2}{2}$, il en résulte la relation $2\sqrt{h_0h_{,}} - 2h_{,} = \mp H$ ; mais H' étant la pente absolue du fond entre les deux sections $\omega_0$ et $\omega_{,}$, on a la relation $H' + h^0 - h' = \pm H$, d'où

$$h' - (h^0 + H') = 2\sqrt{h_0h_{,}} - 2h_{,}.$$

Comme H', $h^0$ et $h_0$ sont ordinairement des données de la question, et que l'on connaît $h_{,}$ en fonction de $h'$, par la relation $h_{,}\omega_{,}^2 = \frac{Q^2}{2g}$, il en résulte que dans l'équation précédente, $h'$ étant la seule inconnue, on pourra facilement en déterminer la valeur. Si, par exemple, la section est rectangulaire on a $\omega_{,} = L_{,}h'$ et par suite $h_{,} = \frac{Q^2}{2gL_{,}^2h'^2}$, ce qui donne

$$h' = \frac{h^0 + H'}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{h^0 + H'}{2}\right)^2 + \frac{2Q}{L'}\sqrt{\frac{h_0}{2g}} - \frac{Q^2}{gL_{,}^2h'}},$$

équation à l'aide de laquelle on obtient facilement la première valeur de $h'$ qui est la hauteur de la plus grande section du relèvement dans la circonstance dont nous venons de nous occuper; quant à la seconde valeur elle correspondra à un abaissement; en effet, la quantité $\frac{2Q}{L_{,}}\sqrt{\frac{h^0}{2g}}$ est égale à $\frac{Q}{L_{,}g}u_0$ et la quantité $\frac{Q^2}{gL_{,}^2h'}$ est égale à $\frac{Q}{gL_{,}} \times \frac{Q}{L_{,}h'} = \frac{Q}{gL_{,}}u_{,}$, ce qui donne $\frac{2Q}{L_{,}}\sqrt{\frac{h_0}{2g}} - \frac{Q^2}{gL_{,}^2h'} = \frac{Q}{gL_{,}}(u_0 - u_{,})$, quantité qui sera positive tant que $u_0$ sera plus grand que $u_{,}$. La seconde valeur de $h'$ sera donc négative, la surface du liquide s'abaissera donc au-dessous du fond, ce qui ne pourra avoir lieu que quand l'augmentation de section sera produite par une chute brusque.

164. Un canal à pente constante de $0^m.0244$ et à section rectangulaire de $0^m.20$ de largeur aussi constante, présente un élargissement brusque qui porte

sa largeur à $0^m.40$, sur une longueur de $1^m.00$, puis un rétrécissement s'opère graduellement sur $1^m.43$ de longueur, de manière à rendre à la section sa largeur première de $0^m.20$; on sait encore que la hauteur du régime uniforme est de $0^m,173$ pour un débit de $0^m,0683$ par seconde, on demande de déterminer la hauteur du relèvement et la forme du nouvel axe hydraulique.

L'équation $h' = \frac{h^o + H'}{2} + \sqrt{\left(\frac{h^o + H'}{2}\right)^2 + \frac{Q}{gL}(u_o - u_,)}$ se réduit à $h' = \frac{h^o}{2} + \sqrt{\left(\frac{h^o}{2}\right)^2 + \frac{Q}{gL}(u_o - u_,)}$ lorsqu'on néglige la hauteur H' due à la pente sur la très-petite longueur sur laquelle s'opère l'élargissement, ce qui est toujours possible lorsque l'on admet, comme nous le faisons ici, que le fonds n'éprouve aucune altération, et que l'élargissement de la section se produit brusquement.

Si nous remplaçons les lettres par les données de la question, nous trouverons, après deux ou trois essais, $h' = 0.26$. La hauteur du relèvement est donc égale à $0.260 - 0.173 = 0.087$.

A $1^m.00$ de distance, au point où se termine l'élargissement et où le rétrécissement va commencer à s'opérer, la hauteur de la section est de $0^m.253$.

A $1^m.43$ de distance du point précédent, le rétrécissement cesse et la section reprend sa largeur de $0^m.20$; en ce point la hauteur de la section est encore de $0^m.25$.

A $0^m.27$ du point précédent, la hauteur de la section se réduit à $0^m.20$.

Enfin, à $3^m.11$ de ce dernier point, l'axe hydraulique du relèvement se raccorde avec l'axe hydraulique primitif et le courant reprend son mouvement uniforme.

### § 4. Effets de la réduction plus ou moins brusque de l'aire de la section d'un courant.

165. Lorsque l'aire de la section d'un courant éprouve une réduction plus ou moins brusque, il est nécessaire de tenir compte de la perte de force occasionnée par la convergence des filets fluides au passage de la section réduite; l'effet produit par cette convergence est connu sous le nom de *contraction de la veine fluide*; il équivaut à une seconde réduction de section, suivant un rapport qui est, en général, déterminé par de nombreuses expériences. Nous ne tarderons pas à donner les moyens d'apprécier les effets de la contraction; pour le moment, nous nous bornerons à dire que l'on atténue ces effets en donnant aux parois qui précèdent la section réduite ou l'orifice, un évasement convenable, et que, quand cet évasement n'existe pas, on est obligé de remplacer l'aire $\omega_{,}$ de la section réduite par $m\omega_{,}$, $m$ étant un coefficient constant et connu, toujours plus petit que l'unité; mais, dans ce qui va suivre, pour éviter des complications inutiles, nous admettrons souvent que

les sections réduites sont précédées d'un évasement.

166. Lorsque dans un courant la forme de la section réduite est donnée ainsi que le débit, la courbure que la surface affecte est une conséquence du mouvement qui résulte de ces données; il s'ensuit que pour résoudre les questions relatives aux réductions de section, il doit suffire de connaître la forme de la section réduite. Nous entrerons d'abord dans quelques détails sur la courbure qu'affecte la surface d'un courant au passage d'une section réduite, puis nous donnerons les moyens de résoudre les questions relatives à cette réduction.

Quelle que soit l'étendue sur laquelle l'effet d'une réduction de section se fasse sentir, cette étendue a des limites et est toujours comprise entre deux sections du courant dont le niveau n'a pas varié.

Si, du point situé vers l'amont, où commencent les variations du niveau de la surface du courant, nous allons vers le point situé vers l'aval, où cessent ces variations, nous pourrons, dans le cas le plus général, reconnaître cinq parties distinctes.

La première, dont l'étendue est souvent considérable, forme ce que l'on appelle l'*amplitude* du relèvement par réduction de section; cette partie est comprise entre le point où le relèvement atteint sa plus grande hauteur et celui où la courbe, formée par la superficie du relèvement, vient rencontrer la surface primitive du courant.

La deuxième partie a toujours peu d'étendue, elle est comprise entre le point où le relèvement atteint sa hauteur *maxima* et le point où la section éprouve la plus grande réduction.

La troisième partie est d'une longueur égale, à très-peu près, à celle de l'ouvrage ou à l'étendue sur laquelle la section a été réduite, elle se trouve donc comprise entre l'entrée et la sortie de l'ouvrage.

La quatrième partie est comprise entre la sortie de l'ouvrage et le point où le relèvement, par réduction de vitesse qui se forme assez fréquemment à l'aval de l'ouvrage, atteint sa hauteur *maxima*.

Enfin, la cinquième partie forme ce que l'on peut appeler l'amplitude du relèvement par réduction de vitesse, et se trouve comprise entre le point où ce dernier relèvement atteint sa hauteur *maxima* et le point situé vers l'aval dont le niveau n'a pas varié.

Dans les circonstances ordinaires, les deux relèvements dont il vient d'être question paraissent rarement réunis; ainsi, il arrive fréquemment que le relèvement par réduction de vitesse qui doit se trouver peu après la sortie de l'ouvrage, est à peine sensible; de plus, comme la réduction de vitesse peut se produire seule, il en résulte que le relèvement qui est dû à cette cause se manifeste souvent sans être précédé du relèvement produit par une réduction de section. Nous pourrons donc nous occuper séparément de chacun de ces relèvements et considé-

rer isolément les quatre parties qui dépendent du relèvement par réduction de section.

167. Admettons qu'à la distance connue $\Delta l_0$ de la tête d'aval de l'ouvrage qui produit la réduction de section, le niveau du courant n'éprouve aucun changement.

Soient : $\Delta H^0$ la pente absolue du fond sur la longueur $\Delta l_0$, pente qui est également connue ; $\omega_0$, $\chi_0$, $h^0$, $h_0$ et $f_0$ les éléments connus de la section dont le niveau n'a pas varié ; $\Delta H_0$ la pente absolue de la surface sur la longueur $\Delta l_0$, pente qui est à déterminer ; $\omega_1$, $\chi_1$, $h'$, $h_1$ et $f_1$ les éléments inconnus qui dépendent de la section à la sortie de l'ouvrage ; la forme de la section étant donnée, on a d'abord : $\omega_1 = f(h')$ et $\chi_1 = F(h')$, on a de plus $f_1 = \frac{ah_1\chi_1}{\omega_1}$, $\omega_0^2 h_0 = \omega_1^2 h_1$, $\Delta H_0 = (f_0 + f_1)\frac{\Delta l_0}{2} + h_0 - h_1 = \Delta H^0 - (h^0 - h')$, d'où

$$h' + h_1 - (h^0 + h_0) = (f_0 + f_1)\frac{\Delta l_0}{2} - \Delta H^0 \ldots (1).$$

Si de cette dernière équation on élimine $h_1$ et $f_1$ par leurs valeurs en fonction de $h'$, on pourra alors déterminer la valeur de $h'$, et, par suite, celle des autres éléments qui dépendent de la section $\omega_1$. On peut obtenir immédiatement une valeur approximative pour $h'$ en négligeant la quantité $(f_0 + f_1)\frac{\Delta l_0}{2} - \Delta H^0$ qui sera fort petite ; il reste alors $h' + h_1 = h^0 + h_0$, d'où on tire facilement la valeur de $h'$.

La section $\omega_1$ étant connue, on peut passer à la détermination de la section réduite $\omega_2$, séparée de la précédente par une distance égale à la longueur de l'ouvrage $\Delta l_1$; soient, sur cette longueur, $\Delta H_1$ et $\Delta H'$ les pentes absolues de la surface et du fond, $\chi_2$, $h'$, $h_2$ et $f_2$ les éléments qui dépendent de la section $\omega_2$, que nous supposerons n'être pas évasée, on aura, comme ci-dessus, $f_2 = \frac{ah_2\chi_2}{m\omega_2}$, $(m\omega_2)^2 h_2 = \omega_1^2 h_1$,

$$h'' + h_2 - (h' + h_1) = (f_1 + f_2)\frac{\Delta l_1}{2} - \Delta H',$$

qui donnera la valeur de $h''$ ou la hauteur de la section réduite; on peut d'ailleurs obtenir une valeur approximative pour $h''$ en posant

$$h'' + h_2 = h' + h_1.$$

La section $\omega_2$ étant connue, on peut passer à la détermination de la section $\omega_3$, dans laquelle le relèvement atteint sa hauteur *maximu*, et qui est séparée de la précédente par une distance $\Delta l_2$ égale à la petite longueur sur laquelle s'opère le raccordement de la section rétrécie avec la section primitive; soient, sur cette longueur, $\Delta H_2$ et $\Delta H''$ les pentes absolues de la surface et du fond, $\chi_3$, $h'''$, $h_3$ et $f_3$ les éléments qui dépendent de la section $\omega_3$, on aura, comme ci-dessus, les relations :

$$f_3 = \frac{ah_3\chi_3}{\omega_3}, \quad \omega_3^2 h_3 = \omega_0^2 h_0,$$

$$h''' + h_3 - (h'' + h_2) = (f_2 + f_3)\frac{\Delta l_2}{2} - \Delta H'',$$

qui donneront la valeur de $h'''$ ou la hauteur de la sec-

tion qui correspond au relèvement; on peut encore obtenir ici une valeur approximative pour $h'''$ en posant $h''' + h_3 = h'' + h_2$.

La section $\omega_3$, qui correspond à la hauteur maxima du relèvement, étant connue, il reste à déterminer l'amplitude de ce relèvement, soient $l$ cette amplitude, H et H' les pentes absolues de la surface et du fond qui lui correspondent. Si nous appelons $h^m$ et $h_m$ les hauteurs de la section où s'opère le raccordement et dont le niveau n'a pas varié, que nous divisions la longueur $l$ en $n$ parties égales, nous avons vu, n° 145, que l'on aurait

$$H = \frac{aQ^2}{4g}\frac{l}{n}\Sigma\frac{\chi}{\omega^3} + h_3 - h_m = H' - h''' + h^m,$$

d'où $$h^m + h_m - (h''' + h_3) = N^2 l\frac{X}{\Omega^3} - H';$$

$\frac{X}{\Omega^3}$ représentant la valeur moyenne $\frac{1}{n}\Sigma\frac{\chi}{\omega^3} = \frac{\Sigma j}{n}$; mais si, lorsque le courant était dans son état primitif, les éléments de la section correspondant à la hauteur maxima du relèvement, étaient $(h''')$ et $(h_3)$, et si $r$ est la hauteur du relèvement, on aura $(h''') = h''' - r$, et de plus

$$h^m + h_m - (h''' - r + (h_3)) = N^2 l\left(\frac{\chi}{\omega^3}\right) - H',$$

$\left(\frac{\chi}{\omega^3}\right)$ représentant $\Sigma\frac{j}{n}$ ou la moyenne des valeurs de $\frac{\chi}{\omega^3}$, qui conviennent au courant dans son état primitif, la différence entre cette équation et son analo-

gue, lorsque la surface est relevée, donne

$$(h_3) - h_3 - r = lN^2\left(\frac{X}{\Omega^2} - \left[\frac{\chi}{\omega^2}\right]\right),$$

et pour l'amplitude $l = \frac{r + h_3 - (h_3)}{N^2\left(\left[\frac{\chi}{\omega^2}\right] - \frac{X}{\Omega^2}\right)}$, expression dans laquelle la quantité $\frac{X}{\Omega^2}$, qui est toujours très-petite, pourra être prise par approximation en augmentant de $\frac{r}{2}$ la hauteur de la section moyenne $\omega$.

168. Lorsqu'on a à résoudre des équations de la forme de l'équation (1) du numéro précédent, on peut diminuer le nombre des essais à faire, en déterminant deux limites entre lesquelles sera toujours comprise la valeur de $h'$ ou celle de $h^\circ$. Pour trouver les limites de la valeur de $h'$, remarquons que $h^\circ$ étant alors déterminé, $h^\circ + h_0 + \Delta H^\circ$ est une quantité constante, et que la quantité $(f_0 + f_1)\frac{\Delta l}{2}$ qui reste négative, tend à diminuer la valeur de $h'$; comme cette quantité quelque petite qu'elle soit, ne sera jamais nulle, il en résulte que $h'$ sera toujours plus petit que le nombre obtenu en la supprimant; $h'$ a donc pour limite supérieure $h^\circ + h_0 + \Delta H'$. Quant à la plus petite valeur de $h'$, elle correspond à la plus petite valeur de $f_1$ ou du rapport $\frac{\chi_1}{\omega_1^2}$, qu'il sera facile de déterminer lorsque l'on connaîtra la forme de la section du courant; les valeurs à essayer

pour $h'$ devront donc être comprises entre ces deux limites.

Pour trouver les limites de la valeur de $h^\circ$, il faut remarquer que $h'$ et $\omega_1$ étant alors déterminés, $h' + h_1$ est une quantité constante; de plus, la quantité $h_0 + \Delta H^\circ$, restant constamment négative, tend à diminuer la valeur de $h^\circ$; en supprimant cette quantité, on aura, pour la limite supérieure des valeurs de $h^\circ$, $h' + h_1 + (f_0 + f_1)\frac{\Delta l}{2}$. Quant à la limite inférieure, il est évident qu'elle est égale à la valeur primitive de $h^\circ$, ou à la hauteur qu'avait la section du courant avant la réduction de la section $\omega_0$; il en résulte que les valeurs à essayer pour $h^\circ$ doivent être comprises entre la hauteur primitive de la section $\omega_0$ et celle qui lui sert de limite supérieure.

169. La théorie que nous venons d'exposer est relative à toute réduction de section, quelle qu'en soit la cause, soit que cette réduction provienne d'un obstacle établi au milieu du courant, soit qu'elle provienne d'une diminution dans la largeur ou dans la hauteur d'une section, soit enfin qu'elle provienne d'une diminution dans son contour, la théorie convient à ces différentes circonstances.

Nous allons maintenant nous occuper spécialement de la réduction de section par diminution de largeur, puis de la réduction de section par exhaussement du fond; comme ces réductions comprennent celles qui résultent de l'établissement

des ponts, des pertuis, des barrages, on a souvent besoin d'apprécier leurs effets; pour faciliter cette appréciation, nous entrerons dans tous les détails nécessaires, et nous les ferons suivre d'applications numériques.

### § 5: Des réductions de section par diminution de largeur.

170. Un pont ou un pertuis établi sur une rivière, en réduit ordinairement la largeur et, par suite, la section, au moins à l'époque des grandes eaux. Le produit du courant, obligé de passer par une moindre section, y prend un excès de vitesse qui ne peut être produit que par un relèvement en amont de l'ouvrage qui cause le rétrécissement. Si, de ce côté d'amont, les piles du pont ou du pertuis présentent une face plane, verticale et perpendiculaire à la direction du courant, il y aura, à l'entrée de chaque ouverture ou de chaque arche, une contraction que l'on rend ordinairement peu sensible en donnant aux extrémités des piles une forme allongée et arrondie que l'on nomme *bec*, laquelle se raccorde avec les parois dirigées dans le sens du courant.

A l'aval du pertuis ou du pont, l'élargissement brusque de la section produit des tourbillons ou des remous dont la forme allongée ou les becs qui se trouvent de ce côté, tendent à atténuer les effets.

Les becs d'amont facilitent l'écoulement des eaux, ceux d'aval diminuent les effets de l'élargissement;

mais leur principale utilité est de contribuer à la solidité et à la conservation des piles, en éloignant de leur pied le danger des affouillements.

171. Considérons un courant dont la section éprouve, sur une faible longueur, une réduction dans sa largeur, et cherchons à déterminer la hauteur de la cataracte occasionnée par cette réduction. La cataracte se composera d'un relèvement au-dessus de la surface primitive qui précédera le rétrécissement, et d'un abaissement au-dessous de la même surface qui suivra le rétrécissement; pour plus de simplicité, nous admettrons que la section soit rectangulaire.

Supposons donc que sur un courant dont le débit est Q, la largeur constante $L_0$, et la pente du fond $i$, également constante, on ait besoin d'établir un pont dont la largeur du débouché soit égale à $L_1$; on connaît d'ailleurs la petite longueur $\Delta l_2$, sur laquelle s'opère le rétrécissement, la longueur $\Delta l_1$ du pont dans le sens du courant, enfin la longueur $\Delta l_0$ après laquelle le niveau de l'eau n'a pas varié.

Le débit, la pente et la forme de la section étant donnés, on connaît la hauteur de la section du courant, dans son état normal, que nous représenterons par $h^0$; on connaît de plus la vitesse moyenne correspondante.

Les données de la question sont donc : Q, $L_0$, $L_1$, $h^0$, $i$, $\Delta l_2$, $\Delta l_1$, $\Delta l_0$, et les quantités à déterminer sont $h'$, $h''$ et $h'''$, ou la hauteur à la sortie de l'ouvrage,

la hauteur au point du plus grand abaissement, et la hauteur maxima du relèvement.

Pour déterminer ces trois hauteurs, nous avons les trois équations :

$$h' + h_1 - (h^\circ + h_0) = (f_0 + f_1)\frac{\Delta l_0}{2} - \Delta H^\circ,$$

$$h'' + h_2 - (h' + h_1) = (f_1 + f_2)\frac{\Delta l_1}{2} - \Delta H',$$

$$h''' + h_3 - (h'' + h_2) = (f_2 + f_3)\frac{\Delta l_2}{2} - \Delta H'',$$

dans lesquelles les quantités $h_1$, $h_2$, $h_3$, $f_1$, $f_2$ et $f_3$ sont connues en fonctions de $h'$, $h''$ et $h'''$; mais, sur la petite distance $\Delta l_2$, qui sépare la section du relèvement $\omega_3$, de la section réduite $m\omega_2$, on peut souvent négliger la quantité $(f_2 + f_3)\frac{\Delta l_2}{2} - \Delta H''$, qui est toujours fort petite, lorsque la largeur seule de la section est réduite; alors on obtient facilement une première approximation de la valeur de $h'''$; en effet, il reste $h''' + h_3 = h'' + h_2$, ou $h''' - h'' = h_2 - h_3 = x$, en représentant par $x$ la différence entre les hauteurs des deux sections, ou celle entre les hauteurs dues aux vitesses correspondantes, on obtient ainsi $h''' = h'' + x$ et $h_3 = h_2 - x$; la permanence du mouvement donne en outre $h'''^2 h_3 = \frac{Q^2}{2gL_0^2}$; si, dans cette équation, on remplace $h'''$ et $h_3$ par leur valeur en $x$, on arrive à l'équation $(h'' + x)^2 \times (h_2 - x) = \frac{Q^2}{2gL_0^2}$, qui donne $x = -h'' + \frac{Q}{L_0\sqrt{2g(h_2 - x)}}$, expression qui, après

deux ou trois essais, fait connaître la valeur de $x$, et, par suite, celle de $h'''$ et de $h_3$.

172. Au lieu de déterminer les valeurs de $h'''$ et de $h_3$, comme nous venons de l'indiquer, et de manière que le niveau du courant cesse de varier à la distance $\Delta l_0$, à l'aval de l'ouvrage, on peut procéder dans un ordre inverse, c'est-à-dire considérer comme connues les hauteurs $h'''$ et $h_3$, et régler l'ouverture de l'ouvrage ou la largeur de la section $L_{,}$ de manière à la rendre favorable à l'écoulement d'un volume d'eau déterminé, de celui des crues, par exemple ; en effet, on a $h''^2 h_2 = \frac{Q^2}{2gm^2 L_{,}^2}$, mais $h'' = h''' - x$ et $h_2 = h_3 + x$, la substitution de ces valeurs donne $(h''' - x)^2 \times (h_3 + x) = \frac{Q^2}{2gm^2 L_{,}^2}$.

La vue de cette équation fait reconnaître qu'il existe une valeur de $x$ qui en rendra le premier membre le plus grand possible ; cette valeur de $x$ s'obtient en égalant à zéro la différentielle du produit $(h''' - x)^2 (h_3 + x)$, ce qui donne $x = \frac{h''' - 2h_3}{3}$; comme le produit, dont la différentielle vient de nous donner la valeur de $x$, est égal à $\frac{Q^2}{2gm^2 L_{,}^2}$, et que cette dernière quantité ne peut varier qu'avec Q ou avec $L_{,}$, il en résulte que pour une largeur donnée $L_{,}$ du pont ou du pertuis, le volume d'eau qui, dans l'unité de temps, traversera cet ouvrage, sera le plus grand possible, lorsque l'on aura $x = \frac{h''' - 2h_3}{3}$, et si le dé-

bit Q est déterminé, on pourra donner au pont ou au pertuis une largeur $L_{,}$ telle, que le rapport $\frac{Q}{L_{,}}$ ou le débit par mètre courant soit le plus grand possible. Si donc, $h'''$ étant connu ou déterminé par des circonstances locales, on veut donner à l'ouvrage une ouverture favorable à l'écoulement des crues, il faudra prendre $x = \frac{h''' - 2h_3}{3}$, ce qui donnera, pour déterminer $L_{,}$,

$$\frac{Q^2}{2gm^2L_{,}^2} = \tfrac{4}{27}(h''' + h_3)^3 = \tfrac{4}{27}(h'' + h_2)^3 = \frac{h''^3}{2}.$$

Ainsi lorsque la largeur $L_{,}$ du pont ou du pertuis n'est pas donnée, on peut la déterminer de manière qu'elle soit la plus petite possible sans nuire à l'écoulement des grandes eaux et à la solidité de la construction.

La relation $x = \frac{h''' - 2h_3}{3}$ donne

$$h''' - x = \tfrac{2}{3}(h''' + h_3) = h'', \text{ et } h_3 + x = \tfrac{4}{3}(h''' + h_3) = h_2,$$

ou $h'' = 2h_2$, et par suite $h''' + h_3 = \frac{3}{2}h''$; à l'aide de ces relations on pourra facilement déterminer $L_{,}$ lorsque l'on connaîtra $h'''$, ou $h''$; on déterminera $h'''$ ainsi que nous l'avons indiqué, ou on prendra cette hauteur telle que les localités le permettront, sans que le relèvement du niveau puisse nuire aux propriétés riveraines; on en conclura alors la valeur de $h''$. La hauteur de la cataracte sous le pont sera $h''' - h''$; si elle était assez considérable pour compromettre la

solidité de la construction, il faudrait diminuer $h'''$, ou plutôt se donner la hauteur de la cataracte et en conclure $h'''$, $h''$ et $L_{,}$, au moyen des relations

$$x=\frac{h'''-2h_3}{3},\ h'''^2h_3=\frac{Q^2}{2gL_0^2},\ h'''+h_3=h''+h_2,$$

$$h'''-h''=x,\ h''^2h_2=\frac{Q^2}{2gL_{,}^2m^2}.$$

173. Lorsque l'on se donnera la valeur de $x$ ou la hauteur de la cataracte sous le pont, la condition du maximum ne pourra pas toujours être remplie ; en effet la hauteur $h'''$, qui correspond au relèvement occasionné par la réduction de section, ne pouvant jamais être moindre que la hauteur $h^\circ$ du courant dans son état normal, pour que la question proposée soit susceptible de solution, il faut que la hauteur $x$ soit toujours plus grande que $\frac{h^\circ-2h_0}{3}$; car si elle était plus petite, on aurait $\frac{h'''-2h_3}{3}<\frac{h^\circ-2h_0}{3}$, ou $h'''-h^\circ<2(h_3-h_0)$, ce qui ne peut pas être; en effet $h'''$ étant plus grand que $h^\circ$, la quantité $h'''-h^\circ$ est positive, tandis que $h_0$ étant plus grand que $h_3$, la quantité $2(h_3-h_0)$ est négative; il résulterait donc de la supposition admise qu'une quantité positive devrait être plus petite qu'une quantité négative.

Lors donc que la hauteur donnée $x$ sera moindre que $\frac{h^\circ-2h_0}{3}$, la condition du maximum ne pourra pas être remplie; la largeur du débouché sera telle qu'elle résultera des relations $h'''+h_3=h''+h_2$,

$$(h'''-x)^2\times(h_3+x)=\frac{Q^2}{2gm^2L_{,}^2},\ h'''^2h_3=\frac{Q^2}{2gL_0^2},\ x=h'''-h'',$$

dans lesquelles les données seront Q, $L_0$ et $h'''$, et les inconnues $h''$, $h_2$, $x$ et $L_{,}$.

Avant de terminer nous ferons observer que la hauteur du relèvement $h'''-h^0$ pourra être nulle, si l'ouvrage ne fait pas obstacle au libre cours des eaux ; cette hauteur pourrait même être négative, mais alors la section ne serait pas réduite.

La hauteur $h'''-h''$, que nous avons désignée par $x$, est la hauteur totale de la chute ou cataracte qui se formera au passage de l'ouvrage; cette hauteur ne pourra être égale à celle du relèvement que dans le cas particulier où l'on pourra avoir $h''=h^0$.

Les applications numériques que nous allons faire jetteront d'ailleurs du jour sur la manière de traiter les diverses questions que l'ont peut avoir à résoudre.

174. Funck, dans son hydrotechnie, rapporte huit observations faites au pont de Minden, sur le Wéser, il y joint même une neuvième observation faite lors de la crue de 1779, mais à cette époque une partie des eaux s'écoulaient sous un pont de décharge.

La largeur de la rivière était sensiblement constante et de $180^m.63$ ; quant au coefficient de réduction nécessaire, pour tenir compte de la contraction des filets fluides au passage des ponts, Eytelwein,

célèbre hydraulicien allemand, le prend de $0^m.85$ lorsqu'il s'agit d'un pont dont les piles sont terminées, vers l'amont, par un plan vertical perpendiculaire au courant, et de $0^m.95$ lorsque les piles présentent un angle aigu dans la direction du courant.

Pour les cinq premières observations, Funck a pris $0^m.90$, pour la valeur de ce coefficient, et $0^m.81$ pour les quatre dernières, parce que la contraction était plus considérable lors de ces dernières observations, le niveau de l'eau s'élevant au-dessus de la naissance des arches; nous conservons ces nombres que nous ne sommes pas à même de pouvoir changer.

Si nous appliquons les formules du n° 149 aux différents débits du pont de Minden, nous pourrons déterminer la hauteur $x$ de la chute correspondant à chaque débit et comparer les résultats du calcul avec ceux qui ont été obtenus par des mesures directes; nous avons réuni, dans le tableau suivant, les données de l'observation et les principaux résultats auxquels nous sommes parvenus.

| Nos d'ordre de Funck. | Quantités données. | | | | Quantités calculées. | | | | Hauteur de la chute | | Différences. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Q Débits. | $L_1$ Largeur du débouché. | $h'$ Hauteur de l'eau sous le pont. | $m$ Coefficient de réduction. | $\frac{Q^2}{2g}$ | $\frac{1}{m^2\omega_1^2}$ | $h_1=\frac{Q^2}{2gm^2L_1^2h'^2}$ | $\frac{Q}{L^2\sqrt{2g}}$ | calculée. | observée. | |
| 722 | 57.58 | 73.69 | 1.424 | 0.90 | 168.98 | 0.000117 | 0.0189 | 0.176 | 0.004 | 0.050 | —0.046 |
| 723 | 430.89 | 84.67 | 2.512 | 0.90 | 9463.15 | 0.000027 | 0.2555 | 0.536 | 0.249 | 0.209 | +0.040 |
| 726 | 733.40 | 88.43 | 3.349 | 0.90 | 27414.60 | 0.0000115 | 0.3152 | 0.912 | 0.278 | 0.314 | —0.036 |
| 724 | 776.58 | 84.43 | 3.887 | 0.90 | 30738.00 | 0.0000106 | 0.3135 | 0.966 | 0.307 | 0.261 | +0.046 |
| 725 | 814.45 | 91.26 | 3.697 | 0.90 | 33809.60 | 0.0000108 | 0.3651 | 1.013 | 0.331 | 0.296 | +0.035 |
| 727 | 973.29 | 97.58 | 4.438 | 0.81 | 50286.00 | 0.0000076 | 0.3846 | 1.235 | 0.295 | 0.345 | —0.050 |
| 728 | 1120.29 | 94.71 | 4.898 | 0.81 | 63968.00 | 0.0000070 | 0.4499 | 1.393 | 0.370 | 0.377 | —0.007 |
| 729 | 1314.56 | 95.96 | 5.366 | 0.81 | 88076.00 | 0.0000057 | 0.4499 | 1.635 | 0.415 | 0.381 | +0.034 |
| 730 | 2364.50 | 132.34 | 5.612 | 0.81 | 284968.00 | 0.0000027 | 0.7736 | 2.941 | 0.540 | 0.574 | —0.034 |

Dans l'application que nous venons de faire, les débits ont été considérables et le débouché du pont n'avait que la moitié de la largeur de la rivière, cependant la hauteur de la chute n'a varié que depuis $0^m,00$ jusqu'à $0^m.57$, ce qui prouve que la hauteur du relèvement, causé par une réduction dans la largeur de la section, est toujours très-faible, puisqu'elle est toujours plus faible que celle de la chute.

Quant aux légères différences entre les hauteurs calculées et les hauteurs observées, elles proviennent des causes suivantes :

1° D'avoir admis que la section était rectangulaire en amont du pont; pour des débits considérables, cette supposition peut être sans influence, mais pour le débit de $57^m.58$, elle doit réduire sensiblement la hauteur de la chute.

2° De la difficulté de prendre des mesures précises au moment des crues.

3° D'une erreur qui semble avoir été commise à l'observation n° 727, lorsque l'on a porté $97^m.53$ pour la largeur du débouché, tandis que la largeur portée à l'observation 725 est seulement de $91^m.26$, et celle de l'observation 728 est de $94^m.71$.

4° Enfin d'avoir négligé la quantité $\left(i - \left[\frac{f_0 + f_1}{2}\right]\right)\Delta l$, qui, il est vrai, est toujours fort petite, mais dont il eut été convenable d'apprécier l'importance, si la pente $i$ avait été donnée par l'observation.

175. Les calculs auxquels nous venons de nous

livrer avaient pour objet de faire voir que l'expérience confirme l'exactitude des formules; cette exactitude nous paraissant hors de doute, nous pouvons nous occuper de la question suivante :

*Un canal rectangulaire de* $10^m.00$ *de largeur constante et d'une pente de* $0^m.001$ *également constante, doit débiter pendant les crues* $50^m.00$ *cubes par seconde; sur ce courant on doit établir un pont de* $6^m.00$ *d'ouverture, on demande quelle sera la hauteur de la chute sous le pont, et par suite la hauteur du relèvement causée par la réduction que doit éprouver la largeur de la section?*

D'après les données de la question, lorsque le courant est dans son état normal, on a $i = I = 0.001$, $Q = 50.00$, $L = 10.00$, et en désignant par $h^\circ$ et $h_o$, la hauteur de la section, et la hauteur due à la vitesse lorsque le mouvement est uniforme, on a

$$h_o = \frac{Q^2}{2gL^2h^{\circ 2}} = \frac{1.275}{h^{\circ 2}}, \text{ et } i = \frac{aQ^2}{2g} \times \frac{L+2h^\circ}{L^3h^{\circ 3}} = \frac{10+2h^\circ}{1000h^{\circ 3}} = 0.001,$$

ou $h^{\circ 3} = 10 + 2h^\circ$, d'où on obtient facilement $h^\circ = 2.45$ et $h_o = 0.21$.

Nous savons donc que le courant, dans son état normal, a une hauteur d'eau de $2^m.45$ et que la hauteur due à la vitesse est de $0^m.21$, c'est-à-dire que l'on a $h^\circ + h_o = 2.66$.

Pour déterminer l'effet produit par le pont dont l'ouverture est $L = 6^m.00$, il faut non-seulement connaître la largeur de ce pont, ou plutôt sa longueur dans le sens du courant que nous supposerons de $10^m.00$, mais encore connaître les longueurs des

parties d'amont et d'aval sur lesquelles s'opère le raccordement de la section primitive avec le débouché du pont; nous admettrons que vers l'amont ce raccordement ait lieu sur une longueur de $5^m.00$, et qu'à l'aval, le niveau du courant cesse de varier à $100^m.00$ du pont. Si nous appelons $\Delta l_0$, $\Delta l_1$, $\Delta l_2$, $\Delta l_3$, les quatre parties dont nous allons nous occuper en remontant de l'aval vers l'amont, nous aurons pour la distance comprise entre la tête d'aval du pont et la section dont le niveau ne doit pas varier

$$\Delta l_0 = 100^m.00.$$

Pour la longueur du pont $\Delta l_1 = 10^m.00$; pour la distance entre la tête d'amont du pont et la section où le relèvement atteint sa hauteur maxima

$$\Delta l_2 = 5^m.00.$$

Enfin $\Delta l_3$ sera l'amplitude du relèvement ou la distance comprise entre la section maxima et celle où l'effet de la réduction cesse de se faire sentir; cette dernière longueur n'étant pas connue, nous la déterminerons lorsque nous connaîtrons la hauteur du relèvement.

Pour déterminer la hauteur $h'$ de la section du courant à la sortie du pont, on a

$$h' + h_1 - (h^0 + h_0) = (f_0 + f_1)\frac{\Delta l_0}{2} - i\Delta l_0 = (f_1 - i)\frac{\Delta l_0}{2},$$

car ici $f_0 = i$.

Mais $h^0 + h_0 = 2.66$, $\Delta l_0 = 100.00$, $f_1 = \left(\frac{L_1 + 2h_1}{L_1^2 h'^2}\right)\frac{aQ^2}{2g}$,

$\frac{aQ^2}{2g}=1.00$, $L_{,}=6.00$, et si nous admettons que $h'$ soit égale à $2^m.00$, pour obtenir une valeur plus approchée de cette hauteur, nous aurons $f_{,}=0.0058$ et $h'+h_{,}=2.90$; comme $h_{,}=\frac{Q^2}{2gL_{,}^2h'^2}=\frac{127.50}{36h'^2}=\frac{3.54}{h'^2}$, il vient $h'=1.45+\sqrt{2-\frac{3.54}{h'}}=1.45+\sqrt{0.23}=1,95$, la hauteur à la sortie du pont sera donc $1^m.95$, on trouve facilement ensuite $h_{,}=0.95$; comme la hauteur du courant, dans son état normal, est de $2^m.45$, il en résulte que la surface du courant présentera une contre-pente de $0^m.50$ entre la sortie de l'ouvrage et la section dont le niveau n'a pas varié.

Pour déterminer la hauteur de la section réduite et contractée, nous avons :

$$h''+h_2-(h'+h_{,})=(f_{,}+f_2)\frac{\Delta l_{,}}{2}-i\Delta l_{,},$$

équation dans laquelle nous savons que $h'+h_{,}=2.90$, $L_{,}=6.00$, $\Delta l_{,}=10.00$, $f_{,}=0.0058$; quant à $f_2$ il est égal à $\frac{aQ^2}{2g}\times\frac{L_{,}+2h''}{m^3L_{,}^3h''^3}$, expression dans laquelle $\frac{aQ^2}{2g}=1.00$; si nous prenons pour la valeur du coefficient de contraction $m=0.95$, et si nous adoptons $1^m.80$ pour une valeur approchée de $h''$, il viendra $f_2=\frac{9.60}{1069}=0.0089$ et $h''+h_2=2.90+0.063$, d'où $h''=1,481+\sqrt{2.193-\frac{3.92}{h''}}=1.82$, on trouve ensuite facilement $h_2=1.143$, la hauteur de la section

réduite sera donc de $1^m.82$, ou de $0^m.63$ plus basse que celle du courant dans son état normal, et sur la longueur du pont la surface du courant présentera une contre-pente de $1.95 - 1.82 = 0.13$.

Pour trouver la hauteur de la section dans laquelle le relèvement atteint sa hauteur *maxima*, nous avons $h''' + h_3 - (h'' + h_2) = (f_2 + f_3)\frac{\Delta l_2}{2} - i\Delta l_2$, équation dans laquelle $h'' + h_2 = 2.963$, $\Delta l_2 = 5.00$, $f_2 = 0.0089$, $f_3 = \frac{L_0 + 2h'''}{L_0{}^5 h'''^3}$; si nous adoptons $2^m.80$, pour valeur approchée de $h'''$, nous aurons

$f_3 = 0.00071$, et $h''' + h_3 = 2.963 + 0.020 = 2.983$,

d'où $h''' = 1.491 + \sqrt{2.223 - \frac{1.275}{h'''}} = 2.82$; la hauteur maxima du relèvement sera donc égale à $2.82 - 2.45 = 0.37$, la hauteur de la cataracte étant égale à $h''' - h''$ sera de $2.82 - 1.82 = 1.00$; la hauteur du plus grand abaissement sera de

$$2.45 - 1.82 = 0.63;$$

quant à la hauteur due à la vitesse $h_3$, elle est égale à $2.983 - 2.82 = 0.163$.

Pour déterminer l'amplitude du relèvement on a $h^0 + h_0 - (h''' + h_3) = (f_3 - i)\frac{\Delta l_3}{2}$, équation dans laquelle on sait que $h^0 + h_0 = 2.66$, $h''' + h_3 = 2.983$, $(f_3 - i) = -0.00029$, d'où l'on tire

$$\Delta l_3 = \frac{0.323 \times 2}{0.00029} = 2227.59,$$

c'est-à-dire que l'effet du rétrécissement se fera sentir, en amont du pont, sur une longueur totale de

$$\Delta l_3 + \Delta l_2 = 2232.59$$

et cessera de se faire sentir en aval à la distance de

$$\Delta l_1 + \Delta l_0 = 110.00.$$

La hauteur de la section réduite sera moindre que la hauteur du courant dans son état normal, mais cette diminution de hauteur se trouve compensée par une augmentation de vitesse; en effet la vitesse primitive était due à la hauteur $0^m.21$, tandis que dans la section réduite elle est due à la hauteur $1^m.143$, la vitesse qui répond à cette hauteur est de $4^m.735$; comme l'aire de la section sous le pont est égale à $6.00 \times 1.82 = 10.92$, et qu'elle se trouve réduite, par la contraction, à $10^m.37$, le débit par cette section sera de $10.37 \times 4.735 = 49.00$, il en résulte que les calculs approximatifs auxquels nous nous sommes livrés ne donnent qu'une différence de $1^m.00$ sur le débit, qui doit être de $50^m.00$.

176. Si d'après la nature du sol et le mode de fondation à préferer, on pouvait craindre que la solidité de la construction ne fût compromise par une chute ou cataracte de $1^m.00$, on pourrait limiter la hauteur de cette chute et déterminer ensuite l'ouverture à donner au pont pour satisfaire à cette condition, ou encore déterminer la hauteur de la section réduite qui doit correspondre à une ouverture donnée.

Dans ces circonstances, on ne sera plus maître de limiter le point où les eaux d'aval doivent conserver leur niveau, il faudra donner aux sections de la partie d'aval une forme telle que la section réduite puisse avoir la hauteur $h'$, car, nous l'avons déjà dit, la hauteur de la section prise à l'amont d'une partie, dépend ordinairement de la forme des sections de cette partie.

Si la hauteur de la chute était seule donnée, la question serait indéterminée, comme cela résulte de l'équation $h''' + h_3 - (h'' + h_2) = (f_2 + f_3)\frac{\Delta l_2}{2} - i\Delta l_2$, car si $b$ est la hauteur donnée de la chute, on aura $b = h''' - h'' = \frac{\Delta l_2}{2}(f_2 + f_3 - 2i) + h_2 - h_3$, équation dans laquelle les inconnues sont L, et $h''$. Lorsque $h''$ sera connu ou déterminé, il faudra disposer les sections d'aval de manière que le liquide prenne effectivement cette hauteur dans la section réduite; mais si le débouché doit en outre être le plus favorable à l'écoulement de l'eau, alors la question est déterminée, et il est facile d'en obtenir la solution; en effet, la quantité $(f_2 + f_3)\frac{\Delta l_2}{2} - i\Delta l_2$, qui est toujours peu considérable, reste sensiblement constante pour de légères variations de la hauteur de la chute; si nous la considérons comme constante et que nous la représentions par $d$, nous aurons

$$h''' + h^3 - (h'' + h_2) = d;$$

si de plus, nous représentons la différence des hau-

teurs $h''' - h''$ par $x$, nous aurons

$$h'' = h''' - x \text{ et } h_2 = h_3 + x - d,$$

ces deux valeurs substituées dans la relation

$h''^2 h_2 = \frac{Q^2}{2gm^2L_{,}^2}$, donneraient $(h''' - x)^2(h_3 + x - d) = \frac{Q^2}{2gm^2L_{,}^2}$;

la valeur de $x$ qui rendra le premier membre de cette équation le plus grand possible, est $x = \frac{h''' - 2(h_3 - d)}{3}$, d'où résulte $h'' = \frac{2}{3}(h''' + h_3 - d)$ et $h_2 = \frac{4}{3}(h''' + h_3 - d)$; on aura donc pour déterminer la valeur de $L_{,}$, ou la largeur à donner au débouché du pont

$$\frac{4}{27}(h''' + h_3 - d)^3 = \frac{Q^2}{2gm^2L_{,}^2}.$$

Dans l'application que nous avons choisie, nous avons trouvé $h''' + h_3 = 2.983$, et $d = 0.020$; admettons donc, que pour une même hauteur du relèvement, on désire rendre le débouché du pont le plus favorable à l'écoulement de l'eau, comme nous avons pris $m = 0.95$, et que nous avons $\frac{Q^2}{2g} = 127.50$, nous aurons pour déterminer $L_{,}$, $(2.963)^3 = \frac{127.50}{(0.95)^2L_{,}^2}$, d'où $L_{,} = 6.06$, c'est-à-dire que la largeur de $6^m.00$ est à peu près la plus favorable au débit.

Si les deux débouchés eussent présenté une différence plus considérable, il eût fallu de nouveau calculer la hauteur de la section à la sortie du pont, puis s'occuper de la partie d'aval et régler sa section de manière à produire l'effet que l'on veut obtenir, car il faut se rappeler que la hauteur de l'eau dans la

partie d'amont dépend surtout de celle qu'elle affecte dans la partie d'aval.

§ 6. Des réductions de section par le relèvement du fond d'un courant.

177. Nous allons maintenant nous occuper des relèvements produits par l'exhaussement du fond d'un courant dans une de ses sections, ou dans une partie dont la longueur, toujours peu considérable, dépasse rarement quatre ou cinq mètres.

Les ouvrages qui produisent cet exhaussement sont des *barrages*, lorsqu'ils sont établis en travers du courant; ils prennent le nom de *déversoirs*, lorsqu'ils sont établis le long d'une rive; enfin il s'appellent *épanchoirs*, lorsqu'ils livrent passage au *trop-plein* d'un étang ou d'un réservoir dont le niveau est maintenu à peu de hauteur au-dessus du seuil de ces ouvrages.

Nous nous occuperons principalement des barrages; ce qui est relatif aux déversoirs et surtout aux épanchoirs, se déduira facilement, des résultats auxquels nous parviendrons, en supposant la surface de l'eau, horizontale en amont du barrage ou la section du courant infinie par rapport à celle qui correspond à l'épanchoir.

178. Pour apprécier les effets produits par un barrage, dont le seuil relève le niveau de l'eau au-dessus de celui que présente le courant dans son état normal, ou lorsque son cours est libre, supposons

qu'en un point de ce courant dont la hauteur primitive est $b$, on établisse un barrage dont la hauteur $\delta$, soit plus grande ou plus petite que $b$; appelons toujours $r$, la hauteur maxima du relèvement ou la différence de niveau entre l'eau d'amont relevée et la hauteur primitive $b$ ; appelons encore $h^{\circ}$, la hauteur à laquelle l'eau d'amont s'élèvera au-dessus du seuil du barrage, conservons d'ailleurs les mêmes notations que ci-dessus, alors $h'''$, $h_3$, $f_3$ seront les éléments qui se rapporteront à la section qui correspond à la plus grande hauteur du relèvement, $h''$, $h_2$ et $f_2$ seront les éléments qui se rapportent à la section qui correspond au seuil du barrage, séparé de la précédente par une distance $\Delta l_2$.

Pour plus de simplicité, admettons que le lit du courant ait une pente constante $i$, et une section rectangulaire à largeur constante $L_0$, enfin que $L_0$ soit la longueur du barrage ou la largeur du débouché qu'il présente.

La hauteur de la section d'amont $h'''$ sera indifféremment $h^{\circ}+\delta-i\Delta l_2$ ou $b+r$, c'est-à-dire que l'on aura la relation $b+r=h^{\circ}+\delta-i\Delta l_2$; si nous désignons par $x$ la pente absolue de superficie ou la différence de niveau $h^{\circ}-h''$, entre la section d'amont et celle qui correspond au seuil, nous aurons

$$h^{\circ}-h''=(f_2+f_3)\frac{\Delta l_2}{2}+h_2-h_3=x,$$

et lorsque l'on pourra négliger la résistance due au

frottement, sur la petite longueur $\Delta l_2$, il viendra

$$h^\circ - h'' = h_2 - h_3 = x, \text{ d'où } h^\circ + h_3 = h'' + h_2,$$
$$h'' = h^\circ - x, \; h_2 = h_3 + x.$$

Lorsque l'on ne croira pas pouvoir négliger la résistance due au frottement, mais que cette résistance, qui sera toujours fort petite, pourra être considérée comme constante et égale à $d$, on aura encore $h'' = h^\circ - x$, mais $h_2$ sera égal à $h_3 + x - d$.

Le mouvement étant permanent on a de plus les relations $(b+r)^2 h_3 = \frac{Q^2}{2gL_0^2}$, $h''^2 h_2 = \frac{Q^2}{2gm^2L_1^2}$; c'est ici le lieu de rappeler que pour la section qui correspond au seuil du barrage, on a $dh'' + dh_2 = o$ et par suite $h'' = 2h_2$, ainsi que cela résulte de l'équation différentielle $dh'' + dh_2 = (f_2 - i)dl$, lorsque $dl = o$, ou lorsque la ligne des résistances se trouve interrompue parce que le liquide se verse librement dans l'air, ce qui donne $h''^3 = \frac{Q^2}{gm^2L_1^2}$.

On a donc entre les dix quantités Q, $L_0$, $L_1$, $b$, $r$, $\delta$, $h^\circ$, $h_3$, $h''$ et $x$, cinq équations qui permettront de déterminer cinq de ces quantités quand les autres seront connues. Les données des questions étant ordinairement Q, $L_0$, $L_1$, $b$ et $\delta$, alors tout est déterminé et l'on peut facilement connaître la hauteur du relèvement, celle de l'eau d'amont, celle de la section qui correspond au seuil, etc.

Si c'est la hauteur de l'eau d'amont qui est don-

née, alors on déterminera facilement la hauteur du barrage, celle du relèvement, etc.

Lorsque l'on connaîtra la hauteur du relèvement, on en conclura soit la hauteur à donner au barrage quand sa longueur sera donnée, soit sa longueur quand la hauteur sera donnée.

Enfin lorsque l'on connaîtra la hauteur de l'eau d'amont et la différence de niveau $x$ entre la section d'amont et celle qui correspond au seuil, on en conclura la hauteur et la longueur à donner au barrage.

179. Si la hauteur due à la faible vitesse que possède le liquide à son passage par la section d'amont peut être négligée, comme cela arrive lorsque l'eau sort d'un réservoir ou d'un étang et passe sur un épanchoir, circonstance dans laquelle la section d'amont est très-grande par rapport à celle qui correspond au seuil, alors on a $h^\circ = h'' + h_2 = \frac{3}{2}h''$; on voit qu'ici les relations sont indépendantes de la hauteur du barrage et qu'elles ne dépendent que de la hauteur $h^\circ$ du niveau de l'eau d'amont au-dessus du seuil.

La relation $h^\circ = \frac{3}{2}h''$ donne $h'' = \frac{2}{3}h^\circ$, c'est-à-dire que quand l'épanchoir d'un étang ou d'un réservoir verse le *trop-plein* des eaux, la hauteur du niveau de l'eau au-dessus du seuil est égale au deux tiers de la hauteur des eaux d'amont au-dessus du même seuil.

180. Si la largeur d'un barrage est déterminée par des circonstances locales, et que la hauteur de l'eau d'amont soit également fixée, on détermine la

hauteur $h''$ de la section qui correspond au seuil par la relation $h''^3 = \frac{Q^2}{gm^2L_{,}^2}$, ce qui donne $h^\circ + h_3 = \frac{3}{2}h''$; la hauteur $b+r$ de la section d'amont étant donnée et la hauteur $h''$ étant déterminée, la différence de ces deux quantités fait connaître la hauteur que doit avoir le barrage pour satisfaire aux conditions énoncées.

Lorsque le niveau de l'eau d'amont est fixé et qu'il en est de même de la hauteur du seuil du barrage, alors on connaît la hauteur $h^\circ$, et par suite la hau- $h'' = \frac{2}{3}(h^\circ + h_3)$, et il faut donner au barrage une longueur $L_{,} = \frac{Q}{m\sqrt{gh''^3}}$.

Ordinairement c'est la hauteur de l'eau d'amont qui est déterminée, soit par les besoins de la navigation, soit par ceux de l'industrie; il ne reste à fixer que la hauteur du barrage, ou la largeur du débouché qu'il doit présenter, ce qui pourra être fait comme nous venons de l'indiquer.

Lorsque l'on connaît le plus grand débit que puisse avoir un courant, si l'on se donne la hauteur des eaux d'amont, ou si l'on désire que le relèvement des plus grandes eaux ne dépasse pas un niveau fixé *à priori*, on a d'abord pour la hauteur de l'eau d'amont au-dessus du seuil du barrage dont la hauteur est donnée, $h^\circ = i\Delta l_2 + h''' - \delta$; la hauteur de la section qui correspond au seuil est alors $h'' = \frac{2}{3}(h^\circ + h_3)$, et la longueur du barrage est $L_{,} = \frac{Q}{m\sqrt{gh''^3}}$. Si la

longueur du barrage était donnée et s'il fallait en déterminer la hauteur $\delta$, on aurait d'abord

$$h'' = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{gm^2L_{,}^2}},$$

puis $h^\circ = \frac{3}{2}h'' - h_3$, et $\delta = h''' - h^\circ + i\Delta l_2$.

181. Les relations $h'' = \frac{2}{3}(h^\circ + h_3)$ et $\frac{h''^3}{2} = \frac{Q^2}{2gm^2L_{,}^2}$ donnent $\frac{4}{27}(h^\circ + h_3)^3 = \frac{Q^2}{2gm^2L_{,}^2}$, d'où on tire

$$Q = 0.385mL_{,} \times (h^\circ + h_3)\sqrt{2g(h^\circ + h_3)},$$

c'est la valeur du débit par le débouché d'un barrage dont la longueur est $L_{,}$, lorsque l'eau d'amont arrive avec une vitesse due à la hauteur $h_3$ et se soutient à la hauteur $h^\circ$ au-dessus du seuil.

Lorsque l'on peut négliger $h_3$, comme cela a lieu quand l'eau sort d'un réservoir, on trouve alors

$$Q = 0,385mL_{,}h^\circ\sqrt{2gh^\circ};$$

l'expérience confirme cette formule et prouve que dans le cas des déversoirs proprement dits et des épanchoirs, près desquels l'eau éprouve en amont comme un arrêt qui affaiblit notablement la vitesse, le débit Q est sensiblement proportionnel à $h^\circ\sqrt{2gh^\circ}$.

Lorsque l'on ne peut négliger $h_3$, comme cela a lieu lorsqu'il s'agit de barrages, quelques hydrauliciens adoptent la formule $Q = KL_{,}h^\circ\sqrt{2g \times h^\circ}$, dans laquelle ils donnent à K une valeur qui varie de $0^m.400$ à 0.443 suivant la valeur de $h_3$. Il est d'ailleurs facile de reconnaître que le coefficient K doit

toujours être plus grand que 0.385, en effet on peut représenter $k_3$ par $\alpha h^\circ$, ce qui donne

$$Q = 0.385 L_1 (1+\alpha)^{\frac{3}{2}} h^\circ \sqrt{2gh^\circ},$$

et lorsque l'on remplace cette expression du débit par $KL_1 h^\circ \sqrt{2gh^\circ}$, il faut bien que l'on ait

$$K = 0.385(1+\alpha)^{\frac{3}{2}};$$

si par exemple $\alpha = 0.08$, on aura $K = 0.482$, si $\alpha = 0.01$, ou si la hauteur due à la vitesse n'est que le centième de la hauteur de l'eau d'amont au-dessus du seuil, on trouve $K = 0.392$.

Plusieurs hydrauliciens ont essayé de déterminer, dans diverses circonstances, la valeur du coefficient K; comme ce coefficient varie avec la vitesse de l'eau d'amont, on doit comprendre le genre de difficulté qu'ils ont rencontré, aussi les recherches sur cet objet sont-elles fort incomplètes.

M. Lesbros, colonel du génie, opérant sur un déversoir de $0^m.20$ de longueur, a trouvé que, pour des charges comprises entre $0^m.01$ et $0^m.22$, le coefficient K a varié de $0^m.424$ à $0^m.385$; ce qui s'accorde avec la théorie précédente, puisque le nombre $0^m.385$ est la valeur minima de ce coefficient lorsque le liquide se déverse sans contraction.

M. Castel, ingénieur de la ville de Toulouse, qui a fait un grand nombre d'expériences au moyen de petits barrages placés dans des canaux de $0^m.74$ et de $0^m.36$ de large, a reconnu que le coefficient K,

qui varie avec la hauteur $h^\circ$ que l'on appelle la charge, varie encore avec le rapport de la largeur du barrage avec celle du canal, comme cela doit être, puisque la contraction ou son coefficient $m$ varie avec ce rapport.

M. d'Aubuisson, qui a discuté les résultats des expériences de M. Castel, pense que, quand on peut négliger la hauteur $h_3$ due à la vitesse dans la section d'amont, et lorsque la largeur du débouché du barrage est moindre que le cinquième de la largeur du canal, la formule $Q = 0.400 L h^\circ \sqrt{2gh^\circ}$ donne le débit avec une exactitude suffisante pour la pratique. Cela revient à supposer dans la formule générale

$$m = 0.90 \quad \text{et} \quad h_3 = 0.09 h^\circ.$$

M. d'Aubuisson a encore reconnu que les résultats de l'expérience sont assez bien représentés par la formule $Q = 0.443 L h^\circ \sqrt{2gh^\circ}$, lorsque la largeur du barrage est égale à celle du canal, et que l'on peut négliger la hauteur $h_3$ due à la vitesse dans la section d'amont. Cela revient à supposer, dans la formule générale, $m = 1.00$, $h_3 = 0.10 h^\circ$.

Il est à désirer que des observations faites avec soin, au moyen des barrages établis sur quelques-unes de nos principales rivières, confirment entièrement la théorie, ou déterminent avec précision les limites entre lesquelles les formules peuvent être appliquées avec confiance.

182. Lorsque le seuil d'un barrage s'élève au-

dessus des eaux d'aval, les effets du barrage sont complétement indépendants de la hauteur de ces eaux; il en est encore de même lorsque la hauteur de la nappe de déversement, ajoutée à la différence de niveau entre le seuil et le fond de la section d'aval, forme une somme plus grande que la hauteur des eaux d'aval, ou lorsque l'on a $h'' + \delta > b$, et comme $h'' = \frac{2}{3}(h^\circ + h_3) = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{gm^2L_{,}^2}}$, on doit en conclure que les effets d'un barrage ne seront indépendants de la hauteur des eaux d'aval que quand on aura $\frac{2}{3}(h^\circ + h_3) > b - \delta$, ou, si l'on aime mieux,

$$\sqrt[3]{\frac{Q^2}{gm^2L_{,}^2}} > b - \delta.$$

Les effets du barrage commenceront à être dépendants de la hauteur des eaux d'aval lorsque l'on aura $\sqrt[3]{\frac{Q^2}{gm^2L_{,}^2}} = b - \delta$; enfin, lorsque l'on aura $\sqrt[3]{\frac{Q^2}{gm^2L_{,}^2}} < b - \delta$, la hauteur de la section qui correspond au seuil ne pourra plus être exprimée par $\sqrt[3]{\frac{Q^2}{gm^2L_{,}^2}}$, elle résultera de l'équation

$$h'' + h_2 - (h' + h_{,}) = (f_{,} + f_2)\frac{\Delta l_{,}}{2} - \Delta H',$$

dans laquelle on connaît $h'$, $h_{,}$, $f_{,}$, $\Delta H'$ et $\Delta l_{,}$; les inconnues sont donc $h''$, $h_2$ et $f_2$, elles seront faciles à déterminer à l'aide des relations

$$h_2 = \frac{Q^2}{2gm^2L_{,}^2h''^2}, \quad f_2 = \frac{aQ^2(L_{,} + 2h'')}{2gm^2L_{,}^3h''^3},$$

qui serviront ici comme dans les circonstances ordinaires.

183. Après avoir donné le moyen de déterminer l'effet produit par un barrage sur la hauteur de l'eau d'amont ou la hauteur absolue du relèvement, ce qu'il importe le plus de connaître, c'est la hauteur relative ou celle qui correspond à une distance donnée, et encore la longueur totale sur laquelle le relèvement se fait sentir, ou ce que l'on appelle l'amplitude du relèvement. Dans les nos 128 et 129, nous avons, donné sur ce sujet, tous les développements nécessaires lorsque le lit du courant est régulier à pente constante; nous allons traiter la même question lorsque le lit est irrégulier.

Dans la circonstance dont il s'agit, il faut nécessairement procéder par partie; si, par exemple, on divise la longueur $l$ de la partie du courant que l'on considère en $n$ parties égales à $\frac{l}{n}$, et si l'on désigne par $\Delta H^\circ$, $\Delta H'$, $\Delta H''$, etc., les pentes absolues du fond qui correspondent respectivement à ces parties, on aura successivement :

$$h^\circ + h_\circ - (h' + h_1) = \Delta H^\circ - N^2(j_\circ + j_1)\frac{l}{n},$$

$$h_1 + h_1 - (h'' + h_2) = \Delta H' - N^2(j_1 + j_2)\frac{l}{n},$$

$$\text{etc.} \qquad = \qquad \text{etc.}$$

La somme de toutes ces équations donnera

$$h^\circ + h_\circ - (h^n + h_n) = -\frac{N^2 l}{n}(j_\circ + 2(j_1 + j_2 + \text{etc.}) + j_n) + \Sigma\Delta H';$$

mais nous avons vu que $j_0 + 2(j_1 + j_2 + \text{etc.}) + j_n$ est sensiblement égal à $2\Sigma j$, on aura donc :

$$h^0 + h_0 - (h^n + h_n) = H' - \frac{2N^2 l}{n}\Sigma j.$$

Si, maintenant, nous désignons par $(h^0)$, $(h_0)$, $(h^n)$, $(h_n)$ les hauteurs qui se rapportent aux sections extrêmes, lorsque le courant était libre et sans relèvement, et par $(j)$ les valeurs de $\frac{\chi}{\omega^2}$ qui conviennent à cet état du courant, nous aurons encore :

$$(h^0) + (h_0) - [(h^n) + (h_n)] = H' - \frac{2N^2 l}{n}\Sigma(j);$$

cette équation, retranchée de son analogue obtenue ci-dessus, donnera :

$$h^0 + h_0 - ((h^0) + (h_0)) + (h^n) + (h_n) - (h^n + h_n) = \frac{2N^2 l}{n}(\Sigma(j) - \Sigma j).$$

Observons maintenant que, si $h^0$ est la hauteur de la section où le relèvement atteint son maximum, $h^0 - (h^0)$ sera précisément la hauteur $r$ de ce relèvement; quant à la quantité $(h^n) + (h_n) - (h^n + h_n)$, elle est égale à la différence $\alpha$ que présentent, dans la $n^{\text{ième}}$ section, les ordonnées de la ligne des résistances avant et après le relèvement, on aura ainsi :

$$r - \alpha = \frac{2N^2 l}{n}(\Sigma(j) - \Sigma j) + (h_0) - h_0.$$

Si l'on se propose de déterminer la section dans laquelle la hauteur du relèvement est réduite à $\alpha$, il faudra calculer la somme de $(j)$ et celle de $j$ jusqu'à

ce que leur différence satisfasse à l'équation précédente:

Lorsque l'axe hydraulique du relèvement se raccorde avec l'axe hydraulique du courant dans son état primitif, $x = v$ et il reste :

$$r = \frac{2N^2 l}{n}(\Sigma(j) - \Sigma j) + (h_0) - h_0;$$

pour déterminer ce point, il suffira donc de chercher les sommes de $j$ et de $(j)$, dont la différence satisfait à cette relation.

On peut déterminer rapidement et d'une manière fort approchée l'amplitude d'un relèvement dont la hauteur maxima est connue ; en effet, au point où le relèvement se termine, la ligne des résistances du relèvement se raccorde avec la ligne des résistances du courant dans son état primitif ; or, nous savons que cette dernière ligne peut toujours être remplacée par une ligne à pente constante $i$, on aura donc, pour cette ligne $(F) = il$, et, pour la ligne des résistances qui correspond au relèvement, $F = (f_0 + f_n)\frac{l}{2}$, et par suite, $l = \frac{2((F) - F)}{2i - (f_0 + f_n)}$ ; mais $(F) - F$ étant la distance entre les deux lignes au point où le relèvement atteint sa hauteur maxima, on a nécessairement :

$$(F) - F = h^0 + h_0 - ((h^0) + (h_0)) = r + h_0 - (h_0),$$

ce qui donne, pour l'amplitude du relèvement,

$$l = \frac{2(r + h_0 - (h_0))}{2i - (f_0 + f_n)}.$$

184. Les eaux d'un courant traversé par un barrage se déversent en passant sur le seuil, puis se réunissent aux eaux d'aval en produisant à leur surface une certaine perturbation. Lorsque le seuil du barrage est assez élevé, le déversement y devient une véritable chute qui trouble entièrement le régime des eaux d'aval, y produit des remous, des tourbillons et parfois un relèvement par réduction de vitesse; puis, après avoir perdu l'excès de force vive acquise pendant la chute, l'eau ne tarde pas à reprendre sa vitesse de régime.

Pour apprécier, sinon tous ces effets, au moins les principales ondulations de la surface, remarquons que la courbe de déversement rencontre ordinairement la surface des eaux d'aval en un point dont l'ordonnée ou la hauteur, au-dessus du seuil, est $b - \delta$, et dont l'abscisse résulte de l'équation de la courbe. Si nous considérons la section oblique du solide de déversement qui passe par le seuil et par le point de rencontre dont nous venons de parler (fig. 31), nous reconnaîtrons que la largeur de cette section, étant égale à $\sqrt{z^2+y^2}$, sera facile à déterminer; la vitesse qui correspond à cette section sera évidemment due à la hauteur $r + h_3$, $r$ étant la hauteur du relèvement; enfin, si l'on appelle $\alpha$ l'angle que fait la vitesse de la section oblique avec celle de la vitesse des eaux d'aval, on trouve facilement

$$\cos\alpha = \frac{mL}{Q}\sqrt{2g(r+h_3)}(b-\delta), \text{ car } b-\delta = \cos\alpha\sqrt{z^2+y^2},$$

et, pour la section que nous considérons :

$$\sqrt{x^2+y^2}=\frac{Q}{mL_{,}\sqrt{2g(r+h_3)}}.$$

Maintenant, $h_0$ étant toujours la hauteur due à la vitesse des eaux d'aval, si nous désignons par $x_{,}$ la pente absolue de la surface entre la section oblique dont nous nous occupons et le point où les eaux tendent à reprendre leur vitesse de régime, nous remarquerons que quand la section, à l'aval du barrage, présentera un élargissement brusque, nous aurons, en vertu de ce que nous avons vu dans le n° 71,

$$x_{,}=2h_0-2\cos\alpha\sqrt{h_0(r+h_3)}=2h_0-\frac{2mL_{,}}{Q}(b-\delta)(r+h_3)\sqrt{2gh_0};$$

équation à l'aide de laquelle on déterminera, dans chaque cas particulier, la pente absolue de la surface du courant dans la partie où le déversement des eaux a troublé le régime.

185. Occupons-nous actuellement de faire quelques applications, afin de jeter du jour sur la théorie qui précède.

1° *Dans le canal du n° 153 et sur toute sa largeur, on doit établir un barrage de 1$^m$.50 de hauteur, on désire déterminer la hauteur du relèvement.*

Par les données de la question, on a $\delta=1^m.50$, $Q=50.00$, $L_0=L_{,}=10.00$, $i=0.001$, $b=2.45$, et, en supposant la section évasée, $m=1$, d'où

$$\frac{Q^2}{2gm^2L_{,}^2}=\frac{Q^2}{2gL_0^2}=1.275 \text{ et } h''^3=\frac{Q^2}{gm^2L_{,}^2}=2.550,$$

ce qui donne $h'' = 1.366$, on a de plus

$$(h^\circ + \delta)^2 h_3 = \frac{Q^2}{2gL_2^2} = 1.275,\ h^\circ + h_3 = \tfrac{1}{2}h'' = 2.049,$$

d'où $h^\circ = 2.049 - \frac{1.275}{(h^\circ + \delta)^2}$, ce qui donne $h^\circ = 1.94$, $h_3 = 0.107$, $h^\circ - h'' = 0.574$; et, pour la hauteur du relèvement, $r = h^\circ + \delta - b = 3.44 - 2.45 = 0.99$; le barrage dont il s'agit relevera donc le niveau du courant de $0^m.99$ dans la section d'amont qui en précède le seuil.

2° *Dans le même canal, on doit relever le niveau de* $1^m.55$ *au moyen d'un barrage qui en occupe toute la largeur, on demande quelle doit être la hauteur de ce barrage?*

Par les données de la question on a

$$r = 1.55 = h^\circ + \delta - b = h^\circ + \delta - 2.45$$

ou $h^\circ + \delta = 4.00$, ce qui donne

$$h_3 = \frac{Q^2}{2gL_0^2(h^\circ + \delta)} = \frac{1.275}{16} = 0.080,$$

on a, comme dans la question précédente, $h'' = 1.366$, mais $h^\circ + h_3 = \frac{1}{2}h'' = 2.049$, d'où $h^\circ = 1.969$, et $\delta = 2.031$.

3° *La hauteur du relèvement étant de* $1^m.55$, *on demande quelle sera l'amplitude de ce relèvement?*

Le canal ayant une pente constante et une section régulière, la formule $\Delta l = \frac{2(r + h_0 - (h_0))}{i - f_0}$ donnera l'amplitude cherchée avec toute l'exactitude désirable.

Par les données de la question, on a $r=1.55$, $h_0=0.080$, $(h_0)=0.21$, $i=0,001$, $f_0=\frac{ah_0}{R_0}=0.00028$; ces nombres introduits dans la formule, donnent $\Delta l=3942.00$, c'est-à-dire que l'effet du relèvement se fera sentir sur une longueur de $3942^m.00$.

Si l'on veut connaître la hauteur du relèvement à une distance donnée en amont du barrage, à $2000^m.00$ par exemple, on cherchera à quelle distance la hauteur du relèvement se trouve réduite à $0^m.70$, puis à $0^m.50$, jusqu'à ce que l'on trouve une distance approchée de $2000^m.00$, on se servira pour cela de la formule $\Delta l=\frac{2(h^\circ+h_0-(h'+h_,))}{2i-(f_0+f_,)}$.

Pour une hauteur de $0^m.70$, on a $h^\circ+h_0=4.08$, $h'+h_,=3.278$, $f_,=0.00052$, on trouve ainsi

$$\Delta l=1335.00.$$

Pour une hauteur de $0^m.50$, on aurait

$$h'+h_,=3.096,\ f_,=0.00064,$$

ce qui ferait trouver $\Delta l=1826.00$.

Pour une hauteur de $0^m.40$, on aurait

$$h'+h_,=3.007,\ f_,=0.00067,$$

ce qui ferait trouver $\Delta l=2043.00$, et résoudrait à peu près la question.

Pour une hauteur de $0^m.30$, on aurait

$$h'+h_,=2.915,\ f_,=0.00074,$$

ce qui donnerait $\Delta l=2377,00$. La différence

$$2377-1335=1042,$$

donne la distance entre le point dont le relèvement est de $0^m.70$, et celui où il est réduit à $0^m.30$; si l'on calculait directement cette distance par la formule $\Delta l = \frac{2(h' + h_1 - (h'' + h_2))}{2i - (f_1 + f_2)}$, on trouverait $981^m.00$ ; la différence entre les deux résultats est donc à peine de $\frac{1}{17}$ et ne s'élèverait pas à $0^m.02$, sur la hauteur de $0^m.30$.

Il est inutile de déterminer un plus grand nombre de points de l'axe hydraulique ; on conçoit très-bien qu'en continuant d'appliquer la formule, on déterminerait tous les points nécessaires au tracé exact de la courbe formée par cet axe ; mais il peut être utile de connaître :

1° Comment a lieu, vers l'amont, le raccordement de l'axe hydraulique primitif avec celui du relèvement;

2° Le point précis du raccordement de l'axe hydraulique du relèvement avec celui du déversement;

3° La forme de l'axe hydraulique à l'aval du déversement.

Le raccordement vers l'amont, de l'axe hydraulique du relèvement avec l'axe hydraulique primitif, aura lieu d'une manière continue, par un contact simple, sans rebroussement ni relèvement par réduction de vitesse ; en effet, nous savons qu'il ne peut y avoir rebroussement ou relèvement par réduction de vitesse que quand la hauteur due à la vitesse, dans la section qui précède le point de rencontre des

axes, est égale ou plus grande que la moitié de la hauteur de la section, ce qui n'a pas lieu ici, car la hauteur de la section est de $2^m.45$, tandis que la hauteur due à la vitesse est seulement de $0^m.21$. A partir du point de raccordement, l'axe hydraulique sera légèrement concave, car dans l'équation

$$l(i-f_{,})\Delta l=2(h'+h_{,}-(h^{\circ}+h_{\circ}));$$

$i\Delta l$ étant plus grand que $f_{,}\Delta l$, il faut bien que $h'+h_{,}$ soit plus grand que $h^{\circ}+h_{\circ}$, ce qui ne peut avoir lieu dans le mouvement permanent, et lorsque $h_{\circ}$ est plus petit que $\frac{h^{\circ}}{2}$, qu'autant que $h'$ est plus grand que $h^{\circ}$.

Pour déterminer le point précis du raccordement de l'axe hydraulique du relèvement avec l'axe hydraulique du déversement, nous avons la relation $z^2=\frac{Q^2}{2gm^2L_{,}^2h_3}-h^{\circ 2}$; si nous supposons la hauteur du barrage de $1^m.50$, comme dans la première application de cet article, nous aurons $\frac{Q^2}{2gm^2L_{,}^2}=1.275$, $h^{\circ}=1.94$ et $h_3=0.107$, ce qui donnera $z^2=8.09$, ou $z=2.84$, c'est-à-dire que les deux courbes se raccorderont à $2^m.84$ en amont du seuil du barrage.

Pour déterminer le point de rencontre de la courbe de déversement avec le niveau des eaux d'aval, il faut remarquer que l'ordonnée de ce point est égale à $b-\delta$; pour trouver son abscisse, il suffira de mettre cette valeur pour $y$ dans l'équation

$$(y^2+z^2)\times(h^{\circ}+h_3-y)=\frac{Q^2}{2gm^2L_{,}^2}.$$

Dans l'exemple que nous avons choisi, $b-\delta=0.95$, $h^{\circ}=1.94$, $h_3=0.107$, $\frac{Q^2}{2gm^2L_{,}^2}=1.275$; on obtient ainsi $z=0.51$, c'est-à-dire que la courbe de déversement rencontrera le niveau primitif à $0^m.51$ à l'aval du seuil du barrage.

Pour déterminer la hauteur du relèvement des eaux d'aval causé par la réduction de la vitesse des eaux affluentes, nous avons trouvé (184) la relation $\Delta H=2h_0-\frac{2mL_{,}}{Q}\times(b-\delta)(r+h_3)\sqrt{2gh_0}$, dans laquelle

$h_0=0.21$, $b-\delta=0.95$, $r+h_3=1.10$, $\frac{Q}{mL_{,}\sqrt{2g}}=1.13$,

ce qui nous donne $\Delta H=-0.42$, c'est-à-dire que la réduction de vitesse occasionnera un relèvement de $0^m.42$ de hauteur; après ce relèvement la surface présentera encore quelques ondulations, puis le courant ne tardera pas à reprendre son régime uniforme.

186. Avant de terminer ce qui a rapport aux barrages et à la hauteur des relèvements qu'ils occasionnent, nous sommes naturellement conduits à nous occuper d'une question traitée par MM. de Prony et Vauthier.

M. de Prony, dans une note insérée dans les Annales des Ponts-et-Chaussées (1er semestre de 1835), relative à l'application du calcul à la mesure des relèvements, a déterminé les hauteurs dont il fallait relever les eaux de la Seine à l'extrémité d'aval de

certains biefs, pour que leur niveau atteignît vers l'amont une hauteur donnée.

Considérons l'un de ces biefs, celui compris entre Maisons et Poissy, dont la longueur est de 20200$^{m}$.00; M. de Prony, sans se préoccuper du confluent de la rivière d'Oise qui se trouve entre Maisons et Poissy, admettait que l'on pourrait considérer cette partie de la Seine comme ayant une section transversale rectangulaire de 174$^{m}$,00 de largeur; il savait d'ailleurs que la pente absolue du fond, entre Maisons et Poissy, était de 1$^{m}$.797, que la hauteur de l'eau sur ce fond était de 1$^{m}$.14 à Maisons, et de 1$^{m}$.20 à Poissy; enfin, que le produit de la rivière ou son débit par seconde était de 158$^{m}$,52.

La question à résoudre était fort simple et consistait à déterminer la hauteur à laquelle il fallait soutenir les eaux à Poissy pour y relever à Maisons le niveau d'étiage de 0$^{m}$.891, afin que la moindre hauteur d'eau, en cet endroit, fût de 2$^{m}$.031.

M. de Prony a trouvé que, pour obtenir l'effet désiré, il fallait soutenir les eaux, à Poissy, à la hauteur de 3$^{m}$.334; comme la hauteur des eaux, à Maisons, devait être de 2$^{m}$.031, que la pente absolue du fond était de 1$^{m}$.797; il en résulte que le niveau des eaux, à Maisons, devait se trouver à 3$^{m}$.828 au-dessus du fond de Poissy; il résultait donc donc des calculs de M. de Prony que la pente absolue de superficie, entre Maisons et Poissy, devait être réduite à

$$3.828 - 3.334 = 0.494,$$

et que la hauteur du relèvement, à Poissy, devait être de 3.334 — 1.200 = 2.134.

M. Vauthier a traité la même question dans le Mémoire que nous avons déjà eu occasion de citer, et qui est inséré dans les Annales de 1836. Cet ingénieur commence par faire observer que M. de Prony ne pouvait substituer, au profil réel de la Seine entre Poissy et Maisons, le trapèze ayant pour côté supérieur la ligne droite tirée du niveau de l'eau, à Maisons, au niveau de l'eau, à Poissy, et, pour côté inférieur, la ligne droite tirée du fond de la rivière, à Maisons, au fond de la rivière, à Poissy. Avant d'aller plus avant, nous croyons devoir faire remarquer que cette observation de M. Vauthier, évidemment juste en principe, est ici sans objet, car on va voir que la pente du fond exerce seule de l'influence sur la hauteur du relèvement, et que cette hauteur est entièrement indépendante de la ligne d'eau préexistante entre Poissy et Maisons.

M. Vauthier donne ensuite, comme résultat de ses calculs, $0^m.262$ pour la pente absolue maxima de superficie qui puisse exister entre Poissy et Maisons, afin que la hauteur de l'eau soit, à Maisons, de $2^m.031$ ; par conséquent, d'après cet ingénieur, il faudrait avoir, à Poissy, une hauteur d'eau de 3.828 — 0.262 = 3.566, et établir en ce point un barrage capable d'y relever les eaux de

$$3.566 - 1.200 = 2.366.$$

Nous allons essayer de résoudre la même question par la formule $\Delta H = N^2\left(\frac{\chi_0}{\omega_0^3} + \frac{\chi_1}{\omega_1^3}\right)\Delta l + h_1 - h_0$; d'après les données de la question, on a $Q = 158.52$, $\Delta l = 20200.00$, $\omega_0 = 174 \times 2.031 = 353.39$, $\chi_0 = 178.06$, $h_0 = 0.01023$, et par suite

$$N^2 = \frac{aQ^2}{4g} = 5.016 \text{ et } \frac{\chi_0}{\omega_0^3} = 0.00000402,$$

mais $\frac{\chi_1}{\omega_1^3}$ est indéterminé; on sait seulement que ce nombre est plus petit que $\frac{\chi_0}{\omega_0^3}$ qui est lui-même fort petit.

Pour obtenir une première approximation, supposons $\frac{\chi_1}{\omega_1^3} = o$ et $h_1 = o$, ce qui réduira l'expression de la pente absolue à $\Delta H = N^2\frac{\chi_0}{\omega_0^3}\Delta l - h_0$, puis donnera $\Delta H = 0.397$, et par suite $h' = 3.828 - 0.397 = 3.431$, $\omega_1 = 596.90$, $\chi_1 = 180.86$, $h_1 = 0.00358$; cette première approximation conduit à $\frac{\chi_1}{\omega_1^3} = 0.0000008$, et pour seconde approximation, à $\Delta H = 0.4816$, puis encore $h' = 3.346$, $\omega_1 = 582.20$, $\chi_1 = 180.69$, $h_1 = 0.00377$, ce qui conduit à $\frac{\chi_1}{\omega_1^3} = 0.00000091$, et, pour la valeur exacte de la pente absolue, $\Delta H = 0.493$, quantité qui est précisément celle trouvée par M. de Prony; mais qui diffère de $0^m.231$ de la plus grande des valeurs indiquées par M. Vauthier; une si énorme différence devant provenir de

minant, à l'aide de la valeur trouvée, une des données de la question, on obtient ainsi deux valeurs pour une même quantité, qui peuvent faire apprécier le degré d'approximation obtenu.

§ 7. Effets causés par un brusque changement de pente du fond ou de la superficie.

187. Lorsque dans un courant la pente du fond ou seulement celle de la surface vient à diminuer d'une manière plus ou moins sensible, soit par les irrégularités que présente le fond, soit par une modification quelconque plus ou moins éloignée, qui change, sur une certaine étendue, la forme de l'axe hydraulique, au point où le nouvel axe vient se raccorder avec l'ancien, le liquide peut éprouver, sur une longueur toujours très-faible, une brusque réduction de vitesse; alors, comme le mouvement ne peut cesser d'être permanent, l'aire de la section augmente, et le niveau du liquide se relève, lorsqu'une augmentation de largeur n'accompagne pas la réduction de vitesse.

Nous savons déjà qu'un relèvement par réduction de vitesse ne se manifeste que quand la vitesse est susceptible d'être réduite d'une quantité notable, et que ces relèvements ne peuvent exister lorsque la hauteur due à la vitesse de l'eau affluente est moindre que la moitié de la hauteur de la section, ce qui fait comprendre pourquoi les courants à faible vitesse et à grande section ne présentent jamais de relève-

ment de cette nature, pourquoi on n'en remarque pas sur les fleuves au moment des marées, sur les rivières à l'extrémité des relèvements par réduction de section.

Pour simplifier la question, nous supposerons un courant à section rectangulaire dont la largeur et la pente sont constantes; le mouvement de ce courant devrait être uniforme, si un obstacle placé dans la partie inférieure du lit ne venait ralentir la vitesse et affaiblir la pente de la surface.

Si nous considérons le point où le mouvement va cesser d'être uniforme, et celui où la pente de la surface éprouve un affaiblissement sensible; comme ces points sont toujours très-voisins, dans l'équation $h' + h_{,} - (h^{\circ} + h_{\circ}) = (i - f_{,})\frac{\Delta l}{2}$, le second membre est une quantité tout à fait négligeable, c'est-à-dire que l'on a $h' + h_{,} = h^{\circ} + h_{\circ}$; le mouvement étant permanent et la section ayant une largeur constante, on a de plus $h_{\circ} = \frac{e}{L_{\circ}^{2} h^{\circ 2}}$, $h_{,} = \frac{e}{L_{\circ}^{2} h'^{2}}$, et par suite $h' - h^{\circ} = \frac{e}{L_{\circ}^{2}}\left(\frac{h'^{2} - h^{\circ 2}}{h^{\circ 2} h'^{2}}\right)$, équation qui apprend que l'une des valeurs de $h'$ est $h' = h^{\circ}$, divisant par $h' - h^{\circ}$, il reste $h^{\circ 2} h'^{2} = \frac{e}{L_{\circ}^{2}}(h' + h^{\circ})$, remplaçant $\frac{e}{L_{\circ}^{2}}$ par $h^{\circ 2} h_{\circ}$, on obtiendra $h'^{2} - h' h_{\circ} = h^{\circ} h_{\circ}$, ce qui donnera, pour les autres valeurs de $h'$,

$$h' = \frac{h_{\circ}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{h_{\circ}}{2}\right)^{2} + h^{\circ} h_{\circ}} = \frac{h_{\circ}}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{4 h^{\circ}}{h_{\circ}}}\right);$$

la quantité, sous le radical, étant essentiellement positive, il en résulte que l'une des valeurs de $h'$ sera toujours négative, et ne peut, par conséquent, convenir à la question qui nous occupe.

La première valeur $h' = h^\circ$ aura lieu toutes les fois que l'uniformité du mouvement ne sera pas altérée entre les deux sections que l'on considère.

La seconde des valeurs positives de $h'$ sera toujours plus grande que $h_0$ ou que la hauteur due à la vitesse dans la section d'amont. Si, d'après les données de la question, $h_0 = \frac{h^\circ}{2}$, la seconde des valeurs positives de $h'$ sera encore $h' = h^\circ$; mais, quand dans un courant on a $h_0 = \frac{h^\circ}{2}$, le débit $\frac{Q}{L}$, par mètre de largeur de section, est un maximum; lorsque cette condition est remplie, il n'y a ni relèvement, ni abaissement au point de raccordement des axes hydrauliques.

Lorsque l'on aura $h_0 < \frac{h^\circ}{2}$, $h'$ sera plus petit que $h^\circ$ et le nouvel axe hydraulique s'abaissera au-dessous de la surface primitive; ainsi pour $h_0 = \frac{h^\circ}{4}$, on trouve $h' = 0.64h^\circ$.

Lorsque $h_0$ sera plus grand que $\frac{h^\circ}{2}$, $h'$ deviendra plus grand que $h^\circ$; ainsi pour $h^\circ = h_0$, on trouve $h' = 1.625h^\circ$, et la section voisine du point de raccordement présentera un relèvement de $0.625h^\circ$, au-dessus de la surface primitive; pour $h_0 = 2h^\circ$, on

trouve $h' = 2.73h^\circ$, et la hauteur du relèvement est de $1.73h^\circ$.

188. Une expérience faite par Bidone, célèbre hydraulicien, membre de l'académie de Turin, justifie complétement la formule que nous venons de donner; l'expérience dont il s'agit a été faite dans un canal à section rectangulaire de $0^m.325$ de largeur; la pente du fond n'était pas constante, mais dans la partie que nous allons considérer, elle était de $0^m.023$ par mètre, le débit par seconde était de $0^m.0351$, et la section avait une hauteur de $0^m.064$, dans la partie dont le régime était sensiblement uniforme.

Bidone ayant établi un barrage dans ce canal (fig. 19) pour obliger l'eau à s'élever, obtint à $1^m.00$ en amont du barrage une profondeur d'eau de $0^m.28$, et eut ainsi l'occasion de faire les observations suivantes : dans la partie d'amont et jusqu'à $4^m.50$ du barrage, la surface du courant présentait un brusque relèvement et la hauteur de l'eau passait, sur un très-petit intervalle, de $0^m.064$ à une hauteur triple, puis la surface du courant devenait légèrement convexe jusqu'au barrage où le liquide se déversait.

Nous allons appliquer à cette curieuse expérience la formule $h' = \frac{h_0}{2} + \frac{h_0}{2}\sqrt{1 + \frac{4h^\circ}{h_0}}$, et donner, dans cette circonstance, le moyen de tracer la courbe de l'axe hydraulique. Dans cette expérience on a $h^\circ = 0.064$ et $h_0 = 0.1456$, ce qui donne $h' = 0.1935$; c'est-à-

dire que près du point où le changement de pente et la réduction de vitesse commencent à se faire sentir, la section du courant prend effectivement une hauteur triple de ce qu'elle était d'abord.

Si maintenant on veut savoir à quelle distance de cette section se trouve celle dont la hauteur est de $0^m.28$, on fera usage de la formule

$$\Delta l = \frac{2(h'' + h_2 - (h' + h_1))}{2i + f_1 + f_2}$$

qui convient aux relèvements dont la surface est convexe; dans les circonstances sus-énoncées, on a

$$h'' + h_2 = 0.2876,\ h' + h_1 = 0.2096,\ f_1 = 0.001415,$$
$$f_2 = 0.000577,$$

ce qui fait trouver $\Delta l = 3.250$; par conséquent la section du relèvement se trouvait à $4^m.25$ du barrage, et la petite longueur sur laquelle l'effet du relèvement se produisait était d'environ 0.250; résultats qui sont en tout conformes aux observations faite par Bidone.

### (5) Des courants naturels.

189. Les courants naturels, fleuves, rivières et ruisseaux, considérés par rapport aux volumes de leurs eaux, présentent trois états distincts, à chacun desquels correspond un lit particulier.

Le premier état est celui d'étiage pendant lequel le volume des eaux est le plus faible dans le cours de

chaque période annuelle ; le lit qui correspond à cet état est le plus sinueux, celui dont le développement est le plus considérable; il est aussi celui dont la section et la pente moyenne sont les plus faibles.

Le niveau d'étiage est important à déterminer pour connaître la plus petite hauteur des eaux et prévoir les difficultés que l'on peut avoir à vaincre pour établir un ouvrage dans le lit d'une rivière.

La pente de superficie des basses eaux se compose d'une succession de pentes douces et de pentes raides qui correspondent à des bassins et à des rapides séparés par des hauts-fonds; ces variations dans les pentes d'étiage sont produites par les inégalités du fond dont l'effet est d'autant plus sensible que le débit de la rivière devient peu considérable, ou que la hauteur des eaux est faible; à la suites des rapides, la superficie d'étiage est quelquefois en contre-pente.

Le second état des eaux d'une rivière est celui pendant lequel le niveau se maintient à une hauteur intermédiaire entre l'étiage et le fond de la vallée, soit que cette hauteur soit la moyenne entre toutes celles des jours de l'année, soit qu'elle corresponde au débit moyen journalier que les Italiens appellent *module*. Cet état est celui des eaux moyennes, sa durée est la plus longue, elle est de plusieurs mois chaque année; le lit qui lui correspond s'appelle *lit mineur ;* il est plus fixe et souvent moins sinueux que celui d'étiage, car il s'étend entre des rives qui s'élèvent jusqu'au niveau du fond de la vallée, tandis

que le lit d'étiage peut ne pas avoir de rives fixes et est quelquefois creusé dans les sables et les graviers.

Le lit mineur, recouvrant le lit d'étiage, a un développement moindre et une pente moyenne plus forte.

Dans toute rivière lorsque le débit augmente, l'effet des inégalités du fond devient moins sensible, les pentes tendent à se régulariser, celles des bassins augmentent et celles des rapides diminuent; il en résulte que pendant les eaux moyennes, les pentes ont déjà beaucoup de régularité.

Le dernier état des eaux d'une rivière a toujours peu de durée, c'est celui des crues, pendant lequel le débit est le plus grand, et où les eaux s'élèvent à la plus grande hauteur dans le cours de chaque période annuelle.

Le lit qui correspond à cet état s'appelle *lit majeur*, il est très-fixe, peu sinueux. Dans cet état, le courant recouvre ordinairement le fond des vallées et s'étend entre le pied de leurs versants; le lit majeur, qui comprend le lit d'étiage et le lit mineur, a le moindre développement et la pente moyenne la plus forte.

La pente de superficie des eaux des crues ne diffère pas sensiblement de celle du fond de la vallée, et à la plus grande régularité possible.

Entre l'état des eaux moyennes et celui des grandes eaux, il faut distinguer un état intermédiaire qui a lieu lorsque les eaux sont sur le point de sortir de leur lit mineur, état que l'on peut appeler *crue de plein bord;* cet état est utile à considérer, lorsque

l'on doit exécuter, dans le lit des rivières, des ouvrages qui ne s'élèvent pas au-dessus du fond des vallées, et que l'on désire que ces ouvrages n'exercent aucune influence sur la hauteur des crues; dans ces circonstances, il suffira que les ouvrages ne causent aucun relèvement à la crue de plein-bord; en effet, comme ces ouvrages ne s'élèvent pas au-dessus du fond de la vallée, ils ne peuvent agir sur la hauteur des grandes crues que par leur action sur la crue de plein-bord, et s'ils ne produisent aucun relèvement sur cette crue, on en conclura, à plus forte raison, qu'ils ne peuvent occasionner de relèvement dans les crues qui lui sont supérieures.

190. Nous venons de voir que, dans les rivières, aux principaux états des eaux correspond un lit particulier qui est d'autant plus sinueux et plus long que le débit est plus faible; il résulte de là que l'axe hydraulique de tout courant n'a pas une direction fixe, mais que la direction de cet axe varie avec le volume des eaux.

D'un autre côté le sol des vallées, dans lequel sont creusés le lit des rivières, étant en général composé de sédiments mal agrégés ou que l'eau désagrège et entraîne facilement, il en résulte encore que quand une rivière est abandonnée à elle-même, l'axe hydraulique changeant de hauteur et de direction avec le volume des eaux, l'action du courant se porte alors d'une rive sur l'autre, attaque successivement différents points des berges et produit les grandes irrégu-

larités que le lit des rivières présente fréquemment dans le sens horizontal et dans le sens vertical.

L'hétérogénité du sol des vallées et les variations du volume des eaux sont donc les principales causes des irrégularités que présente le lit des rivières; on conçoit en effet que si les eaux étaient constamment à l'état d'étiage ou à celui des crues, le lit serait approprié à l'un de ces deux états; mais comme les rivières passent continuellement de l'un de ces états à l'autre, elles modifient incessamment leur lit, attaquent et corrodent les berges, entraînent puis déposent les sables et graviers qui proviennent des corosions, forment ainsi des îles qui commencent par n'être qu'un dépôt de gravier, lequel s'élève petit à petit et se couvre spontanément de plantations.

Comme on ne peut empêcher les variations du volume des eaux que les rivières débitent, pour donner de la stabilité au lit de ces courants, il n'y a que deux choses à faire; la première, qui n'est pas toujours praticable, consiste à faire en sorte que l'axe hydraulique conserve à peu près la même direction dans tout état des eaux, afin de concentrer l'action du courant sur cette direction.

La seconde consiste à opposer à l'action des eaux une berge suffisamment résistante sur les points où il est nécessaire de changer faiblement la direction de cette action.

On parvient à concentrer l'action du courant sur une même direction par des rectifications de lit ou

simplement de berges et par des digues convenablement établies; on augmente la résistance des berges attaquées ou seulement menacées, par des enrochements, des fascinages et des plantations.

A l'aide des ces divers moyens, on parvient à donner au lit de la régularité, à diminuer la masse des matières mises en mouvement et à fixer le régime de la rivière.

Lorsque le lit change très-peu avec le temps et avec les variations du débit, on dit que la rivière a un régime stable. Aucune rivière ne parvient spontanément à avoir un régime stable sur une grande étendue de son cours; mais sur la plupart de ces courants, on rencontre de petites parties qui paraissent avoir un régime stable; lorsque cela a lieu, l'axe hydraulique conserve à peu près la même direction dans tout état des eaux.

191. La résistance du lit est, comme nous l'avons dit, le moyen dont la nature se sert pour modérer la vitesse; mais comme les eaux exercent à leur tour, sur les matières qui composent le sol dans lequel le lit est creusé, une action à laquelle ces matières résistent rarement lorsque la vitesse est considérable, il en résulte que le lit des courants n'est pas invariable de forme, comme nous l'avons admis jusqu'ici, car chaque nature de terrain ne peut résister à l'action des eaux que quand cette action est faible, et chaque partie du lit résiste, en effet, tant que la vitesse est moindre que celle qui donne aux eaux la force né-

cessaire pour détruire la cohésion. Lorsque la cohésion est vaincue, les matières étant désagrégées sont entraînées par l'action des eaux, puis lorsque la pente ou la vitesse, en s'affaiblissant, ne laisse plus à l'eau la force nécessaire pour continuer ce travail, les matières se déposent sur différents points du cours. En effectuant le travail dont il vient d'être question, l'eau consomme une partie de la quantité de mouvement qu'elle possède ou qu'elle aurait pu acquérir, et la ligne des résistances affecte une pente plus forte que celle qu'elle aurait eue si l'eau du courant avait pu rester sinon claire, au moins sans sable ni gravier.

Lorsque ces circonstances se présentent, il est encore possible de déterminer la résistance que le courant éprouve, de reconnaître si dans la relation $Rf = ah$, le coefficient $a$ doit éprouver quelque changement, enfin de parvenir à des équations applicables au moment des crues ; en effet, nous savons que dans tout courant, quelle que soit la nature du liquide en mouvement, on a pour déterminer la hauteur perdue en résistance $\Delta F = \Delta H' - (\Delta h' + \Delta h_1)$ ; c'est-à-dire que si l'on construit un rectangle dont un des côtés soit $\Delta H' + h^0 + h_0$, le côté opposé sera nécessairement $h' + h_1 + \Delta F$ ; comme on connaît $\Delta H'$ et $\Delta h'$ par le profil en long, et $\Delta h_1$ par la différence des hauteurs dues aux vitesses moyennes que l'on peut obtenir par des mesures suffisamment précises, il en résulte que $\Delta F$ est déterminée indépendamment de toute

supposition préalable : on parviendrait ainsi à déterminer la hauteur perdue en résistance dans un courant quelconque, fût-il aussi impétueux qu'un torrent.

Nous avons d'ailleurs

$$\Delta F = (f_0 + f_1)\frac{\Delta l}{2}, \text{ ou } \frac{\Delta F}{\Delta l} = \frac{a}{2}\left(\frac{h_0}{R_0} + \frac{h_1}{R_1}\right),$$

relation dans laquelle tout est connu à l'exception de $a$; en opérant sur un grand nombre de sections, pour obtenir avec plus de précision la valeur de $a$, on trouvera

$$a = \frac{2\left(\frac{\Delta F_0}{\Delta l_0} + \frac{\Delta F_1}{\Delta l_1} + \frac{\Delta F_2}{\Delta l_2} + \text{etc.}\right)}{\frac{h_0}{R^0} + 2\left(\frac{h_1}{R_1} + \frac{h_2}{R''} + \text{etc.}\right) + \frac{h^n}{R^n}};$$

on aura ainsi le coefficient spécial qui convient au courant lorsqu'il charie du sable et des graviers, la comparaison de cette valeur avec $2j\frac{g}{\pi}$ fera reconnaître si les crues ont pour effet d'augmenter ou de diminuer la valeur de $j$, qui dans l'état ordinaire est de $0^m.40$. La valeur du nouveau coefficient étant $a'$, on opérera au moment des crues, avec l'équation $Rf = a'h_1$, comme on opérait dans les temps ordinaires avec l'équation $Rf = ah$.

192. Les matières que charient les courants diffèrent entre elles par leur grosseur, leur poids et leur figure; ces matières sont du limon ou des vases lorsqu'elles sont extrêmement ténues, des sables tant que leur diamètre ne dépasse pas deux millimètres, des

graviers lorsque leur diamètre est au-dessous de deux centimètres; enfin des cailloux ou galets lorsque leur diamètre est supérieur à deux centimètres.

Lorsqu'un sédiment aura une pesanteur spécifique peu différente de celle de l'eau, il cédera à la moindre vitesse; si au contraire ce sédiment a une pesanteur spécifique considérable, son poids le retiendra sur le fond tant que l'action de l'eau ne sera pas assez puissante pour vaincre l'inertie et la résistance dues au frottement. Les terres, les sables et les menus graviers céderont toujours à une faible vitesse.

Enfin si les sédiments sont arrondis ou d'une figure propre à rouler, ils seront plus faciles à entraîner que des sédiments plats, anguleux ou d'une forme irrégulière.

On doit concevoir, d'après ce que nous venons de dire, qu'il existe une relation entre la vitesse d'un courant et la grosseur des sédiments qu'il déplace et dépose; avant de nous occuper de cette relation nous entrerons dans quelques détails sur le transport même des matières chariées par les courants.

193. Les matières transportées par les courants peuvent l'être de trois manières :

1° Si les sédiments sont extrêmement ténus, ils restent constamment suspendus dans le courant dont ils prennent la vitesse et colorent les eaux, c'est le transport par suspension;

2° Lorsque la vitesse est assez faible, ou les sédiments assez gros pour que le courant ne puisse cha-

rier ceux-ci qu'en les faisant rouler ou glisser sur le fond, c'est le transport par roulement ou par glissement, transport qui produit le bruit que l'on entend lorsque l'on prête une oreille attentive sur les eaux des fleuves, tels que le Rhin, le Rhône, la Garonne, etc.;

3° Lorsque la vitesse est assez forte et les sédiments assez petits pour obéir aux impulsions successives de l'eau et être soulevés et soutenus dans les eaux du courant qui sont animés de la plus grande vitesse, on a alors le transport par soulèvement.

Les matières limoneuses et vaseuses tenues en suspension dans l'eau, coulent souvent avec elle jusqu'à la mer; ces matières ne se déposent que sur les points où la vitesse est à peine sensible; elles colorent les eaux, et la teinte qu'elles leur donnent fait reconnaître l'affluent dont la crue les apporte, et les localités d'où elles proviennent.

Les sédiments que l'eau déplace et qui sont assez lourds pour ne pas quitter le fond du lit, sont, en général, entraînés à de petites distances, quelques-uns glissent, la plupart roulent, leurs déplacements sont tout à fait locaux; s'ils s'arrêtaient et s'accumulaient, le fond du lit s'exhausserait; or, le fond du lit ne s'exhausse pas, et, sur un grand nombre de points, l'eau coule sur le tuf, l'argile et le roc qui sont à nu et non recouverts de sédiments.

Les sables de toute grosseur et le menu gravier sont souvent soulevés et transportés à d'assez grandes

distances, et lorsqu'un courant est assez fort pour rouler des graviers à de petites distances, il a la puissance de soutenir et transporter les sables à de grandes distances; il les soulève même assez haut pour les obliger à franchir les barrages, et quelquefois les berges; il les dépose ensuite là où la vitesse diminue; souvent une crue en dépose 3 ou $4^m.00$ de hauteur dans les bras secondaires, dans les rentrants où il y a des remous, partout où il y a un ralentissement de vitesse; mais jamais dans le lit proprement dit.

194. Nous pouvons maintenant nous occuper de la relation qui existe entre la vitesse d'un courant et le plus grand volume des matières qu'il peut charier. Soient :

$\pi$ le poids du mètre cube d'eau;

$\Pi$ le poids d'un mètre cube des matières entraînées;

$b$ la section verticale et perpendiculaire à la direction du mouvement de l'un des sédiments;

$d$ la longueur du même sédiment, dans la direction du mouvement;

U la vitesse de l'eau au fond du lit.

Le poids du sédiment dans l'eau sera $(\Pi - \pi)bd$.

Si nous admettons que, dans l'eau comme dans l'air, le frottement du sédiment sur le fond du courant soit proportionnel à la pression, et si nous désignons par $\frac{1}{f}$ ce frottement pour une pression dans

l'eau égale à l'unité de poids, $\left(\frac{\Pi - \pi}{f}\right)bd$ sera la résistance que le liquide devra vaincre pour que le sédiment puisse se mouvoir.

L'action du liquide a pour mesure la quantité de mouvement que possède la partie de sa masse qui agit sur le sédiment; or, cette masse est égale au poids d'une colonne de liquide ayant pour base la section verticale $b$, et pour hauteur la vitesse U, le tout divisé par la gravité; l'action du liquide sur le sédiment a donc pour expression $\frac{\pi b U^2}{g}$.

Lorsque le mouvement du sédiment est uniforme ou sensiblement uniforme, l'action du liquide est alors précisément à la résistance qu'oppose le sédiment, on doit donc avoir :

$$\frac{\pi b U^2}{g} = \left(\frac{\Pi - \pi}{f}\right)bd \text{ ou } f U^2 = \left(\frac{\Pi - \pi}{\pi}\right)gd.$$

Mais V étant la vitesse à la surface, $u$ la vitesse moyenne, et U la vitesse au fond ; si, conformément à l'observation de M. de Prony, nous admettons que, dans la pratique, on puisse prendre $u = 0.82V$, on aura $U = 0.78u = 0.64V$, ce qui donnera

$$U^2 = 0.609u^2 = 0.410V^2.$$

On aura donc :

$$fU^2 = 0.609fu^2 = 0.41fV^2 = \frac{\Pi - \pi}{\pi}gd.$$

Il résulte de cette relation que la résistance $f$ ne dépend que de la pesanteur spécifique du sédiment,

de la vitesse de l'eau et de la longueur $d$ du sédiment, et qu'elle paraît indépendante de sa section verticale $b$ ou de sa hauteur; mais cette hauteur a nécessairement pour limite la longueur même du sédiment, car, si elle était plus considérable, le sédiment ne serait pas dans une position stable, et ne tarderait pas à se renverser; d'un autre côté, lorsque le sédiment a une hauteur égale à sa longueur, il ne tarde pas à s'arrondir et à rouler sur le fond.

Nous devons conclure de ce qui précède que les sédiments plats glissent sur le fond du lit, que ceux qui roulent doivent être à peu près cylindriques ou sphériques, ou être tels que les sables, et avoir des dimensions très-faibles.

Si nous remplaçons $U^2$ par sa valeur $2gh_{,}$, $h_{,}$ étant la hauteur due à la vitesse U. du fond, nous aurons $f = \frac{\Pi - \pi}{2\pi} \times \frac{d}{h_{,}}$; mais le frottement $f$ étant constant pour des matières de même nature ou d'égale densité, il est nécessaire que le rapport $\frac{d}{h_{,}}$ le soit, ou que la dimension des sédiments, dans le sens du mouvement, soit sensiblement proportionnelle à la hauteur due à la vitesse.

Nous savons que, quand un courant a une grande largeur et se meut d'un mouvement sensiblement uniforme, on a $h'I = ah$, $h'$ étant la hauteur de la section, et $h$ la hauteur due à la vitesse moyenne, on tire de là $u = 11.19\sqrt{h'I}$ et $U = 8.73\sqrt{h'I}$, ou

$h_{,} = 3.88hI$, et par suite $f = \frac{\Pi - \pi}{7.76\pi} \times \frac{d}{h'I}$, relation entre la profondeur du courant, sa pente et la grosseur des sédiments.

195. Dubuat, en plaçant sur le fond d'un canal en bois différentes matières, et inclinant le canal, a fait varier la vitesse, et a mesuré, pour chaque matière, la vitesse à laquelle elle cessait d'être entraînée.

MM. Telford et Nimmo, ingénieurs anglais, ont aussi mesuré les vitesses auxquelles d'autres matières cessaient d'être entraînées ; nous allons rapporter les résultats de ces expériences, après avoir indiqué le moyen de compléter ces résultats.

La pesanteur spécifique $\Pi$ des matières que charient les courants étant moyennement de $2^m.60$, il en résulte que $\frac{\Pi - \pi}{2\pi} = 0.80$, on a donc $f = 0.80\frac{d}{h_{,}}$ ou $f = 0.80 \times \frac{2gd}{U^2} = 15.70 \times \frac{d}{U^2}$, lorsque $U = 0.65$ et $d = 0.027$, ce qui convient aux galets de mer que Dubuat a soumis à ses expériences, on trouve $\frac{d}{U^2} = 0.064$, et par suite $f = 1.00$; en adoptant ce nombre pour la valeur de $f$, nous avons pu calculer la dimension, dans le sens du mouvement, des matières entraînées à différentes vitesses, ce qui nous a permis d'ajouter quelques colonnes aux tableaux des expériences de Dubuat et des ingénieurs anglais.

| Nature des matières qui cèdent à l'action de l'eau animée de la vitesse limite. | Quantités données. | | Quantités calculées. | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Pesanteur spécifique. | Vitesse limite au fond. | Vitesse à la surface. | Pente par kilomètre pour 1m de profondeur. | Grosseur des sédiments. |
| ***Expériences de Dubuat.*** | | | | | |
| Argile brune, propre à la poterie.. | 2.640 | 0.081 | 0.126 | 0.0846 | 0.00019 |
| Sable fin..... | 2.545 | 0.162 | 0.253 | 0.3385 | 0 00077 |
| Gros sable jaune et anguleux... . | 2.360 | 0.216 | 0.337 | 0.61 | 0 0014 |
| Gravier de la Seine { de la grosseur d'un anis. | 2.545 | 0.108 | 0.168 | 0.1513 | 0.00035 |
| Gravier de la Seine { de la grosseur d'un pois. | 2.545 | 0.189 | 0.294 | 0.4666 | 0.0011 |
| Gravier de la Seine { de la grosseur d'une fève de marais..... | 2 545 | 0.325 | 0.508 | 1 384 | 0 0031 |
| Galet de mer de 0.027 de diamètre. | 2.614 | 0.650 | 1.016 | 5.535 | 0.027 |
| Silex anguleux, gros comme un œuf. | 2.250 | 0.975 | 1.520 | 12.454 | 0.045 |
| ***Expériences de MM. Telfort et Nimmo.*** | | | | | |
| Terre détrempée, boue..... | 2.545 | 0.076 | 0.118 | 0.0757 | 0.00017 |
| Argile tendre..... | 2.545 | 0.152 | 0.237 | 0.3027 | 0.00068 |
| Sable..... | 2.545 | 0.305 | 0.472 | 1.218 | 0.00275 |
| Gravier..... | 2.545 | 0.609 | 0 950 | 4.8581 | 0.0110 |
| Cailloux..... | 2 545 | 0.914 | 1.426 | 10.962 | 0.0245 |
| Pierres cassées, silex..... | 2.545 | 1.220 | 1.903 | 19.516 | 0.0410 |
| Cailloux agglomérés, schista tendre. | 2.545 | 1 520 | 2 371 | 30.276 | 0.0683 |
| Roches en couches..... | 2.545 | 1.830 | 2.855 | 43.681 | 0.0990 |
| Roches dures..... | 2.545 | 3.050 | 4.720 | 121.801 | 0.2755 |

La pente est comptée par kilomètre, et ne peut convenir que quand la hauteur de l'eau est seulement de $1^m.00$ ; mais il est facile d'en déduire la pente qui correspond à une hauteur donnée ; en effet, on a $h'I = \left(\frac{U}{8.73}\right)^2$, et, lorsque U ne change pas, le produit $h'I$ est une quantité constante ; par conséquent, si, lorsque $h' = 1$ on a $I = c$, on en con-

clura, pour une valeur quelconque de $h'$, que $I = \frac{c}{h'}$; il suffira donc de diviser, par la hauteur effective, la pente qui figure au tableau pour avoir la pente qui correspond à cette hauteur.

Nous avons appelé *vitesse limite* au fond, la vitesse qui suffit pour entretenir le mouvement des sédiments; cette vitesse est toujours un peu plus faible que celle qui détermine le mouvement, car, au moment du départ des matières, l'action de l'eau doit vaincre leur inertie, tandis que, lorsqu'elles sont en mouvement, l'action de l'eau n'a plus à vaincre que la résistance due au frottement sur le fond.

196. Nous venons de déterminer les vitesses auxquelles les graviers et sédiments du lit des courants cèdent à l'action des eaux et sont entraînés en glissant ou roulant sur le fond; mais lorsque les vitesses sont plus considérables, une partie des matières est soulevée par l'action du liquide dont les couches supérieures charient les sédiments les plus ténus, tandis que les couches inférieures charient les sédiments les plus gros.

L'eau des courants transporte ainsi des matières qui sont plus denses qu'elle, et elle en transporte d'autant plus que les variations de la vitesse des différents points d'une même section sont plus considérables, ou que la différence entre la vitesse au fond et la vitesse à la surface est plus grande. Pour le prouver, conservons les mêmes notations que dans

les articles précédents et considérons un sédiment soulevé dans le liquide qui se meut d'un mouvement sensiblement uniforme à la profondeur $z$ au-dessous de la surface du courant. Le poids du sédiment dans l'eau sera encore $(\Pi - \pi)bd$, la résistance qu'il éprouve à se mouvoir dans le liquide doit être dans un certain rapport avec ce poids; si nous désignons ce rapport par $\frac{1}{f}$, la résistance dont il s'agit aura pour expression $\left(\frac{\Pi - \pi}{f}\right)bd$; c'est cette résistance qui est vaincue à chaque instant par l'action du liquide, tant que le sédiment se meut en restant soutenu. Si $v$ est la vitesse du filet liquide situé à la profondeur $z$, la force accélératrice qui répond à cette vitesse est égale à $\frac{dv}{dt}$.

Quant à la force motrice, elle dépend de la masse du liquide qui agit réellement sur le sédiment; si la section verticale $b$ du sédiment était considérable, il faudrait avoir égard à la variation de la vitesse $v$ sur l'étendue de cette section; mais comme cette section est toujours fort petite, la force motrice ou l'action du liquide sur le sédiment aura donc pour expression

$$\frac{\pi}{g\alpha} b \frac{dv}{dt} = \pi b \frac{dv}{dz}.$$

Lorsque le mouvement du sédiment est sensiblement uniforme, on doit avoir $\left(\frac{\Pi - \pi}{f}\right)bd = \pi b \frac{dv}{dz}$; mais nous savons que lorsque différents points de la sec-

tion d'un courant sont situés sur une même verticale, on a $\frac{dv}{dz}=\frac{iz}{\varepsilon}=\frac{2(V-U)z}{h'^2}$, ce qui conduit à

$$\frac{1}{f}=\frac{2\pi}{\Pi-\pi}\times\frac{V-U}{h'^2}\times\frac{z}{d},$$

relation fort simple entre la grosseur du sédiment et la moindre profondeur à laquelle on puisse le trouver.

Quelques expériences peuvent servir à faire connaître le rapport $\frac{1}{f}$; ce rapport une fois connu, servira à déterminer la grosseur $d$ des sédiments qui pourront se trouver aux différentes profondeurs $z$ de la section, on aura donc $d=\frac{2\pi f}{\Pi-\pi}\times\left(\frac{V-U}{h'^2}\right)z$; le rapport $\frac{V-U}{h'^2}=\frac{i}{2\varepsilon}$ est, ainsi que le fait judicieusement observer M. Dupuit, ce qui détermine pour chaque section la grosseur des matières que le courant peut soulever et charier à différentes profondeurs.

La pesanteur spécifique des matières que charient les courants étant moyennement de $2^m.60$, si nous admettons que l'expérience ait fait trouver $f=0.10$, nous aurons pour une section quelconque $d=0.125\left(\frac{V-U}{h'^2}\right)z=0.045\frac{Vz}{h'^2}$; pour une section dont la vitesse à la surface serait de $2^m.00$, celle au fond de $1^m.28$, et la profondeur de $3^m.00$, on aura $\frac{V-U}{h'^2}=0.080$, et par suite $d=0.01z$, c'est-à-dire que dans le courant dont il s'agit, la grosseur des matières soulevées et chariées sera égale à un cen-

tième de la profondeur, ce qui permet de reconnaître que, dans les circonstances admises, les plus gros graviers soulevés et chariés auront une grosseur inférieure à trois centimètres, et que les sables de un millimètre de grosseur pourront s'élever jusqu'à dix centimètres de la surface du courant. C'est assez s'arrêter sur une question peu importante en elle-même, et dont la solution, que nous venons de présenter, n'est pas à l'abri de toute critique.

Ici se termine naturellement ce que nous avions à faire connaître sur les lois du mouvement de l'eau dans les courants découverts; ce que nous avions l'intention d'ajouter pour compléter l'hydraulique proprement dite, se rapporte au mouvement de l'eau dans les canaux fermés, à celui de l'eau qui sort d'un réservoir, et aux moteurs hydrauliques; mais ce complément est moins nécessaire, comme étant déjà convenablement présenté dans plusieurs traités sur la matière. Nous avions cependant fort avancé le travail relatif à ces divers objets, et nous regrettons que sa révision exige plus de temps que nous ne pouvous lui en consacrer; nous nous bornerons donc, pour le moment, à faire voir que l'équation du mouvement de l'eau, dans les canaux fermés, ne diffère pas de celle qui convient aux courants découverts, et à faire connaître quelques-uns des résultats de nos recherches sur la contraction de la veine fluide; ces deux objets seront exposés, le plus succinctement possible, dans les articles suivants.

## LIVRE III.

### *Mouvement permanent de l'eau dans les courants fermés, et principalement dans les tuyaux de conduite.*

197. Dans un courant couvert ou fermé, tel que celui qui existe dans un long tuyau, lorsque le liquide y coule à pleine section, le mouvement a lieu en vertu des mêmes lois que dans les courants découverts, ainsi que cela résulte de la théorie générale exposée dans le chapitre III du livre premier. L'équation obtenue, dans le n° 47, en considérant une masse liquide continue, se mouvant dans un lit quelconque dont les sections varient par degrés insensibles, convient aux deux circonstances.

Lorsque le mouvement est permanent l'équation générale du n° 47 se réduit à

$$\frac{M(u_1^2 - u_0^2)}{2} = Mg\left(H + \frac{P_0 - P_1}{\pi}\right) - \int F ds,$$

et donne par la pression P que supporte un point quelconque des parois

$$P = \pi H + P_0 + \pi\left(\frac{u_0^2 - u_1^2}{2g}\right) - \pi \int \frac{F}{Mg} ds.$$

On peut d'ailleurs obtenir directement les équations précédentes ; en effet, le mouvement étant permanent, la vitesse est indépendante du temps, et comme le système n'est soumis qu'à l'action de la

pesanteur, à celle des pressions et à la résistance due au frottement contre les parois, on peut lui appliquer le principe des forces vives; avant de faire cette application nous rapellerons que $\omega_0$ et $\omega_1$ sont les aires des sections extrêmes de la partie que l'on considère;

Que $P_0$ et $P_1$ sont les pressions par unité de surface que supportent ces sections;

Que $u_0$ et $u_1$ sont les vitesses moyennes qui correspondent à ces sections;

Que $h_0$ et $h_1$ sont les hauteurs dues à ces vitesses moyennes;

Que H est la différence de niveau des centres de gravité des sections extrêmes, ou la pente absolue, de la ligne formée par la suite des centres de gravité des sections;

Que F est la résistance due au frottement qu'éprouve le mouvement du liquide, résistance qui est aussi indépendante du temps, mais qui est fonction de la vitesse et de la forme des sections;

Que $M = \frac{\pi}{g} Q$ est la masse constante que le courant débite dans chaque unité de temps;

Que $s$ est la longueur de la ligne des centres, ou le chemin décrit par le centre de gravité de la masse en mouvement;

Que $l$ est la longueur de la projection horizontale de la ligne $s$;

Désignons de plus par $h^0$ et $h'$, les hauteurs dues

aux pressions que supportent les sections extrêmes, on aura par conséquent $P_0 = \pi h^0$ et $P_1 = \pi h'$.

La quantité d'action imprimée, dans chaque unité de temps, par la pression qui agit sur la section d'amont sera $P_0\omega_0 u_0$, et la quantité d'action totale due aux pressions sera

$$P_0\omega_0 u_0 - P_1\omega_1 u_1 = (P_0 - P_1)Q = \frac{Mg}{\pi}(P_0 - P_1) = Mg(h^0 - h').$$

La quantité d'action imprimée par la pesanteur, entre les sections extrêmes et pendant l'unité de temps, sera $MgH$.

L'action élémentaire de la résistance F sera $Fds$, et la quantité d'action qu'elle absorbera aura pour expression $\int Fds$, cette intégrale étant prise sur la partie $s$ de l'axe du courant comprise entre les sections extrêmes.

La moitié de la variation de la force vive qui a lieu, pendant l'unité de temps, entre les sections extrêmes est égale à $\frac{M}{2}(u_1^2 - u_0^2)$.

L'application du principe des forces vives au système que nous considérons, donnera donc

$$\frac{M}{2}(u_1^2 - u_0^2) = Mg\left(\frac{P_0 - P_1}{\pi}\right) + MgH - \int Fds,$$

ou si l'on veut

$$\frac{Mu_0^2}{2} + Mg\frac{P_0}{\pi} + MgH = \int Fds + \frac{MgP_1}{\pi} + \frac{Mu_1^2}{2} \ldots (1);$$

C'est-à-dire que la quantité d'action que possède

le liquide à son passage par la section d'amont, augmentée de la quantité d'action due à la pression qui a lieu dans cette section, augmentée encore de la quantité d'action imprimée par la pesanteur sur la hauteur H, ou sur la pente absolue de l'axe de la partie du canal ou tuyau dont on s'occupe, doit toujours être égale à la quantité d'action absorbée par la résistance, sur la longueur $s$ de l'axe qui sépare les sections extrêmes, augmentée de la quantité d'action due à la pression qui a lieu dans la section d'aval et de celle que conserve le liquide à son passage par cette section.

Si l'on divise l'équation (1) par $Mg$, on aura

$$\frac{u_0^2}{2g}+\frac{P_0}{\pi}+H=\int\frac{F}{Mg}ds+\frac{P_1}{\pi}+\frac{u_1^2}{2g};$$

et si l'on remplace les hauteurs dues aux vitesses par $h_0$ et $h_1$, et celles dues aux pressions par $h^0$ et $h'$, en faisant de plus $\frac{F}{Mg}=f$, on aura

$$h_0+h^0+H=\int fds+h'+h_1 \ldots (2),$$

équation de même forme que celle du n° 108, et qui va nous conduire à des conséquences analogues.

198. Considérons une partie quelconque d'un courant fermé dont la longeur projetée sur l'horizontale soit représentée par AB, et désignée par $l$, la longueur de l'axe ou de la ligne des centres étant toujours désignée par $s$ (fig. 20).

Divisons la longueur AB en un certain nombre de parties égales, petites ou grandes, que, pour plus de simplicité, nous prendrons toutes égales entre elles et que nous représenterons par $\Delta l$.

Par chacun des points de division de la longueur $l$, élevons des perpendiculaires à cette ligne qui seront des verticales équidistantes :

Soient $h^0$, $h'$, $h''$, etc., les hauteurs dues aux pressions qui correspondent aux verticales ;

$h_0$, $h_1$, $h_2$, etc., les hauteurs dues aux vitesses moyennes des sections qui correspondent également aux verticales ;

$\Delta H_0$, $\Delta H_1$, $\Delta H_2$, la série des pentes absolues des parties de l'axe comprises entre les verticales ;

$e^0$, $e'$, $e''$, les pentes relatives de l'axe aux points d'intersection des verticales ; l'équation différentielle de cet axe sera $dH = edl$, et lorsque sa courbure sera faible et continue, on pourra prendre $\Delta H = \left(\frac{e^0 + e'}{2}\right)\Delta l$ pour son équation aux différences.

Construisons le rectangle AC dont la hauteur AE soit égale à $H + h^0 + h_0$, et rapportons sur les verticales à partir de leur rencontre avec l'axe et au-dessus de ce point les hauteurs $h' + h_1$, $h'' + h_2$, etc. ; nous obtiendrons deux suites de points dont les derniers appartiendront à la ligne des résistances et les premiers à la ligne des pressions, ainsi qu'il va être facile de le reconnaître.

Représentons par $\Delta R_0$, $\Delta R_1$, $\Delta R_2$, etc., la série des

pentes absolues de la ligne supérieure; par $r^o$, $r'$ et $r''$, etc., les pentes relatives de la même ligne aux points d'intersection des verticales, l'équation différentielle de cette ligne sera $dR = rdl$, et lorsque sa courbure sera faible et continue, on pourra prendre $\Delta R = \left(\frac{r^o + r'}{2}\right)\Delta l$ pour son équation aux différences.

Représentons encore par $\Delta P_o$, $\Delta P_1$, $\Delta P_2$, etc., les pentes absolues de la ligne inférieure; par $I^o$, $I'$, $I''$, etc., ses pentes relatives, l'équation différentielle de cette ligne sera $dP = Idl$, et son équation aux différences pourra être $\Delta P = \left(\frac{I^o + I'}{2}\right)\Delta l$.

Si maintenant nous considérons le rectangle AC, dont le côté AE est égal à $H + h^o + h_o$, et si après avoir pris $BD = h^n + h_n$, nous désignons CD par R, nous aurons $H + h^o + h_o = R + h^n + h_n$, cette relation comparée à l'équation (2) donnera $R = \int f ds$, lorsque l'on prendra $h^n + h_n = h' + h_1$; mais $\int f ds$ est la hauteur perdue, en résistance sur la partie de l'axe dont la longueur est $s$; cette hauteur étant égale à R ou à CD, nous avons donc eu raison de dire que la ligne supérieure était la ligne des résistances, puisque les ordonnées comprises entre cette ligne et la base supérieure du rectangle, sont les hauteurs perdues en résistances; il est aussi facile de reconnaître que la ligne inférieure a pour ordonnées les hauteurs dues aux pressions et qu'elle est par conséquent la ligne des pressions.

Du rectangle AC, on obtient facilement les relations suivantes :

$$\Delta P_0 + h_0 = \Delta R_0 + h_1, \quad \Delta P_0 + h' = \Delta H_0 + h^0$$

$$\text{et } h^0 + h_0 + \Delta H_0 = \Delta R_0 + h' + h_1;$$

et si des différences on passe aux différentielles on obtiendra :

$$(I - r)dl = dh, \quad (e - I)dl = dh' \text{ et } dh + dh' = (e - r)dl.$$

Lorsque le mouvement est uniforme, $dh = o$ et $I = r$, c'est-à-dire que la ligne des résistances est parallèle à celle des pressions.

Lorsque la pression est constante, $dh' = o$ et $I = e$, par conséquent, la ligne des pressions est parallèle à celle des centres.

Lorsque l'on a $h^0 + h_0 = h' + h_1 = constante$, alors $dh' + dh = o$ et $r = e$; c'est-à-dire que la ligne des résistances est parallèle à la ligne des centres.

Lorsque le mouvement est uniforme et que la pression est constante, on a en même temps $dh = o$ et $dh' = o$, ce qui donne $I = r = e$; par conséquent, dans cette circonstance, les trois lignes sont parallèles.

Si l'on eût représenté par $b_0$ et $b_1$ les hauteurs du centre de gravité des sections extrêmes au-dessus du fond du courant, par $\Delta H^0$ la pente absolue du fond entre ces sections, par $i^0$ et $i'$ les pentes relatives de la ligne du fond qui correspondent aux sections extrêmes, l'équation différentielle de cette ligne eût

été $dH^\circ = idl$, et, lorsque sa pente est faible et sans inflexion, son équation aux differences eût été $\Delta H^\circ = \left(\frac{i^\circ + i'}{2}\right)\Delta l$, puis les équations du mouvement seraient devenues :

$$\Delta H^\circ + b_\circ + h^\circ + h_\circ = \Delta R_\circ + b_{,} + h' + h_{,},$$

$$\Delta H^\circ + b_\circ = \Delta H_\circ + b_{,}, \quad \Delta P_\circ + h_\circ = \Delta R_\circ + h_{,},$$

$$\Delta H_\circ + h^\circ = \Delta P_\circ + h',$$

et auraient donné :

$$\Delta H^\circ + \Delta P_\circ + h_\circ + b_\circ = \Delta R_\circ + \Delta H_\circ + h_{,} + b_{,};$$

relation qui apprend que pour tous les points où $b_\circ + h_\circ = h_{,} + b_{,}$, on a nécessairement :

$$\Delta H^\circ + \Delta P_\circ = \Delta R_\circ + \Delta H_\circ.$$

Si des différences on passe aux différentielles, on obtient $(i + I)dl - (e + r)dl = db + dh$, et, lorsque $db + dh = o$, il vient $i + I = e + r$.

Lorsque la section est rectangulaire à largeur constante L, comme la hauteur est égale à $2b$, il en résulte que la permanence du mouvement donne $hb^2 = \frac{Q^2}{8gL^2}$, d'où $2hdb + bdh = o$, et, lorsque l'on a $db + dh = o$, il vient $h = \frac{b}{2}$; c'est-à-dire que, pour tous les points où $db + dh = o$, la hauteur due à la vitesse est égale au quart de la hauteur de la section.

Si la section est constante, on a en même temps $dh = o$ et $db = o$, d'où $I = e$ et $I = r$, sans que l'on puisse en conclure que $h = \frac{b}{2}$.

Nous croyons inutile de nous étendre davantage sur les considérations qui précèdent, car, dans la pratique, les courants fermés étant ordinairement à section constante, le mouvement est nécessairement uniforme, ce qui simplifie beaucoup les questions et réduit les équations dont nous venons de nous occuper à une seule, qui est

$$\Delta H_0 + h^0 = \Delta R_0 + h' \text{ ou } dh' = (e - r)dl.$$

199. Lorsqu'il s'agit de conduire l'eau d'une source ou d'un réservoir à une grande distance, on emploie une suite de tuyaux joints ensemble. Ces tuyaux, dont la section est ordinairement circulaire, sont d'ailleurs en fonte, en terre cuite, en pierre ou en bois, et doivent avoir une épaisseur suffisante pour résister à la pression du liquide.

En hydraulique, on appelle *conduite*, la suite de tuyaux dont nous venons de parler. La conduite est simple lorsqu'elle ne consiste qu'en une seule file de tuyaux menant à son extrémité toute l'eau qu'elle a reçue à son origine. Si, en un point quelconque d'une conduite, on implante un tube vertical, l'eau s'élève dans ce tube jusqu'à ce que le poids de la colonne soit en équilibre avec la pression exercée sur ce point ; si $p_0$ désigne cette pression rapportée à l'u-

nité de surface, $p_a$ la pression atmosphérique, $h^o$ la hauteur de la colonne dans le tube supposé ouvert par le haut, $\omega$ l'aire de la section du tube, $\pi h^o \omega$ sera le poids de la colonne du liquide contenu dans le tube, et l'on devra avoir $p_o \omega = p_a \omega + \pi h^o \omega$ ou $\frac{p_o}{\pi} = \frac{p_a}{\pi} + h^o$; en un autre point, on aurait $\frac{p_i}{\pi} = \frac{p_a}{\pi} + h'$, d'où $\frac{p_i - p_o}{\pi} = h' - h^o$; c'est-à-dire que la pression, en un point quelconque d'une conduite, est toujours égale à la pression atmosphérique augmentée du poids de la colonne du liquide contenue dans le tube, et que la difference des hauteurs dues aux pressions est égale à la différence des hauteurs du liquide contenu dans les tubes.

Les tubes que l'on implante sur les conduites, et qui servent à mesurer les pressions qui ont lieu sur les points où ils sont adaptés, s'appellent des *piézomètres*. Lorsqu'un de ces tubes est fixé d'une manière permanente, il indique les variations qu'éprouvent les pressions, et sert à faire reconnaître les circonstances qui influent sur ces variations.

Lorsqu'un ensemble de conduites présente un tronc qui se ramifie et se sous-ramifie de diverses manières, un tel assemblage s'appelle un *système de conduites*, et sert aux distributions d'eau dans les grandes villes. Dans un pareil système, plusieurs conduites secondaires se réunissent ou se *branchent*, comme disent les fontainiers, pour former le tronc

principal, sur lequel on fait des prises d'eau menées par d'autres conduites secondaires, sur ces dernières se branchent des conduites d'un troisième ordre, et ainsi de suite, jusqu'au petit tuyau qui porte le robinet de chaque fontaine.

Nous chercherons à déterminer les circonstances du mouvement de l'eau dans les différentes parties d'un système de conduites, lorsque nous aurons terminé ce qui est relatif aux conduites simples.

200. Toute conduite simple est déterminée lorsque l'on connaît son axe et sa section en chaque point; mais son axe peut être droit ou courbe ou brisé, de même sa section peut être constante de surface, ou cette surface peut varier, soit avec continuité, soit d'une manière brusque.

L'équation générale du mouvement permanent $h^{\circ}+h_{\circ}+H=h'+h_{,}+R$ s'appliquera aux diverses circonstances qui se présentent; mais, pour faire usage de cette équation, il faut savoir déterminer ou mesurer les termes dont elle se compose; ces termes sont relatifs aux pressions, aux vitesses, à la pente absolue de l'axe et à la hauteur perdue en chocs et en résistances; avant de donner les moyens de mesurer ou de déterminer chacun de ces termes, nous ferons remarquer que l'expression de la hauteur perdue en chocs et résistances se compliquera suivant les circonstances, car la forme de cette expression, qui convient lorsque le mouvement est rectiligne et uniforme, sera moins simple lorsque la section du courant cessera d'être

constante; elle se composera nécessairement de plusieurs termes, lorsque l'axe du courant étant en ligne droite, les variations de la section seront brusques au lieu d'être graduelles, lorsque l'axe cessant d'être rectiligne, sa courbure ou ses brisures seront plus ou moins fortes dans le sens horizontal ou dans le sens vertical. Ceci revient à dire que la force vive que possède l'eau en mouvement dans les conduites est susceptible d'éprouver trois pertes distinctes, qui sont :

1° La perte due à la résistance qui provient du frottement contre les parois, résistance qui agit tant que le mouvement dure, quelle que soit d'ailleurs la forme de la conduite dans le sens longitudinal et dans le sens transversal ;

2° La perte occasionnée par les variations brusques de la vitesse ou de l'aire de la section transversale de la conduite ;

3° La perte due aux sinuosités de l'axe et aux changements brusques qu'il éprouve dans sa direction.

Les expériences manquent pour confirmer, en toutes circonstances, l'exactitude des expressions auxquelles on parvient pour la hauteur perdue en choc et résistance; heureusement les conduites dont on fait usage dans la pratique, étant ordinairement à section circulaire et constante, et leur axe ayant toujours une faible courbure dans le sens vertical, cela simplifie beaucoup les questions, et l'expression

de la hauteur perdue en résistance étant alors confirmée par un grand nombre d'expériences, on doit lui accorder toute confiance dans les applications que l'on peut avoir à faire.

201. Considérons d'abord une conduite dont l'axe soit en ligne droite, la résistance que le mouvement de l'eau éprouvera dans cette conduite sera, comme dans les courants découverts, proportionnelle au produit de la surface frottante par le carré de la vitesse et en raison inverse de l'aire de la section. C'est-à-dire qu'en désignant par $\omega$ l'aire de la section, $\chi$ son contour, $h$ sa hauteur due à la vitesse, $s$ la longueur de la conduite, et $a$ un coefficient constant, on a $R = a\int\frac{\chi h}{\omega}ds$, et, si l'on continue de représenter $\frac{a\chi h}{\omega}$ par $f$, on aura $R = \int fds$. Nous engageons à revoir le chapitre II du livre II, où nous avons donné, sur la résistance due au frottement et sur son expression, tous les développements nécessaires.

Lorsque la conduite est circulaire, si l'on représente son diamètre par D, on aura $\frac{\chi}{\omega} = \frac{4}{D}$, ce qui donnera $R = 4a\int\frac{hds}{D}$ et $f = \frac{4ah}{D}$.

Lorsque le diamètre D est constant, le mouvement est uniforme, et $h$ est également constant, ce qui donne $R = \frac{4ahs}{D} = fs$, car $f$ est alors une quantité constante.

Il convient de rappeler que $l$ étant la projection

horizontale de l'axe de la conduite, l'équation différentielle de la ligne des résistances est $dR = rdl$; mais nous venons de trouver $dR = fds$, on doit donc avoir $fds = rdl$.

D'un autre côté, la ligne des centres a pour équation différentielle $dH = edl$, et comme on a d'ailleurs $ds = \sqrt{dH^2 + dl^2} = dl\sqrt{1+e^2}$, il s'ensuit que $rdl = fds = fdl\sqrt{1+e^2}$, ou que $r = f\sqrt{1+e^2}$, cette relation nous apprend que l'inclinaison de la ligne des résistances est en même temps fonction de la ligne des centres et des éléments de la section; par conséquent, la ligne des résistances ne sera droite qu'autant que la conduite, ayant une section constante, son axe sera rectiligne. Lorsque la ligne des centres sera droite, le rapport $\frac{r}{f}$ sera constant.

Dans le cas où le mouvement est uniforme, l'équation générale du mouvement permanent se réduit à $h^\circ + H = h' + R$; comme R est alors égal à $fs$, il en résulte que l'on a $\frac{R}{s} = f = \frac{h^\circ + H - h'}{s}$. Ce rapport est ce que l'on appelle la perte de charge due au frottement sur chaque unité de longueur de la conduite.

Si l'on désigne $H + h^\circ - h'$ par $\zeta$, on aura $f = \frac{\zeta}{s}$, cette quantité est celle que M. de Prony désigne par $j$; si nous adoptons cette notation, et si la section

est circulaire, ce qui donne $f=\frac{4ah}{D}$, on aura $\frac{1}{4}Dj=ah$, équation de même forme que celle proposée par MM. de Prony et Eytelwein pour les cas ordinaires de pratique.

Pour déterminer la valeur numérique du coefficient $a$ et en vérifier la constance, nous avons calculé la valeur du rapport $\frac{Dj}{4h}$ pour les cinquante-une expériences dont les résultats sont consignés dans le recueil des cinq tables publié par M. de Prony, et nous avons trouvé que ce rapport était sensiblement constant et égal à 0.007848, valeur qui est précisément la même que celle trouvée pour les courants découverts. Pour vérifier le travail dont il vient d'être question, nous avons déterminé, par la valeur numérique de $a$, la vitesse qui correspond à chaque expérience; nous présentons dans le tableau n° 2, pour toutes les expériences, les vitesses observées et les vitesses calculées,

1° Par la formule $\frac{1}{4}Dj = 0.007848ah$;

2° Par la formule de Prony,

$$\frac{1}{4}Dj = 0.0000173u + 0.000348u^2.$$

Les différences entre les vitesses observées et les vitesses calculées ne varient généralement, en plus ou en moins, que de quantités moindres que $\frac{1}{10}$; cependant, quelques-unes s'élèvent jusqu'au dixième, et une seule jusqu'au quart, mais alors la formule de Prony donne des différences au moins aussi fortes

qui semblent provenir d'un défaut de précision dans les observations.

La formule $RI = \frac{1}{4}Dj = 0.007848h$ peut donc être employée avec la même confiance, soit qu'il s'agisse du mouvement uniforme de l'eau dans les courants couverts ou fermés, tels que celui qui a lieu dans les conduites, soit qu'il s'agisse du mouvement uniforme de l'eau dans les courants découverts.

Lorsque la pression est constante, on a $h' = h^\circ$ ou $R = H$ et $r = e$, ce qui donne $f = \frac{e}{\sqrt{1+e^2}}$, c'est-à-dire que $f$ est alors égal au sinus de l'angle d'inclinaison de la tangente à la ligne des centres.

Lorsque le mouvement n'est pas uniforme, on a

$$R = \int f ds = \frac{a\int \chi h}{\omega} ds = \frac{aQ^2}{2g}\int \frac{\chi ds}{\omega^3},$$

et si, dans cette circonstance, la section est circulaire, on a $\frac{\chi}{\omega^3} = \frac{64}{\pi^2 D^5}$ et $R = \frac{32aQ^2}{\pi^2 g} \times \int \frac{ds}{D^5}$.

202. Lorsque la section d'une conduite varie avec continuité ou par degrés insensibles, l'intégrale $R = \int f ds = \frac{aQ^2}{2g}\int \frac{\chi ds}{\omega^3}$, prise entre des limites convenables, servira à résoudre les questions qui peuvent se présenter, si d'ailleurs les données sont en nombre suffisant; mais cette intégrale ne suffit plus lorsque les variations brusques qu'éprouvent les sections occasionnent de nouvelles pertes de hauteur ou de nouvelles pertes de forces vives. Les variations brus-

ques de section sont de deux sortes, car toute section peut augmenter brusquement de surface, et cette surface peut aussi diminuer brusquement.

Occupons-nous d'abord de déterminer la perte de hauteur causée par une augmentation brusque de l'aire de la section d'une conduite.

Considérons une conduite dont l'axe rectiligne (fig. 21) soit AB, supposons que la section constante jusqu'au point I éprouve une augmentation de surface telle que son diamètre moyen passe brusquement de CD à EF, et reprenne ensuite graduellement son diamètre primitif, de telle sorte qu'au point L on ait CD = GH; après le point I, le liquide étant obligé de changer de vitesse, perdra, suivant ce que nous avons vu dans le n° 64, une hauteur due à la différence des vitesses, c'est-à-dire que si $\Omega$ est l'aire de la section CD, $u_0$ la vitesse qui correspond à cette section, $h_0$ la hauteur due à cette vitesse, $\omega_1$ l'aire d'une section très-voisine de la section EF, et située à l'aval de cette section, $u_1$ la vitesse correspondante, $h_1$ la hauteur due à cette vitesse, la hauteur perdue en tourbillons ou tournoyements sera égale à $\frac{(u_0-u_1)^2}{2g}$, et comme la propriété fondamentale du mouvement permanent donne $\Omega u_0 = \omega_1 u_1 = Q$, il s'ensuit que $u_1 = \frac{\Omega}{\omega_1} u_0$ ou que $u_0 = \frac{\omega_1}{\Omega} u_1$ on aura donc, pour la hauteur perdue

$$\frac{(u_0-u_1)^2}{2g} = h_0\left(1-\frac{\Omega}{\omega_1}\right)^2 = h_1\left(\frac{\omega_1}{\Omega}-1\right)^2,$$

et sur la longueur IL $= s$, on aura

$$R = \frac{aQ^2}{2g}\int\frac{\chi ds}{\omega^3} + h_0\left(1 - \frac{\Omega}{\omega_1}\right)^2;$$

l'équation générale du mouvement, entre les sections CD et GH supposées égales, sera donc :

$$h^0 + H = h'' + \frac{aQ^2}{2g}\int\frac{\chi ds}{\omega^3} + h_0\left(1 - \frac{\Omega}{\omega_1}\right)^2$$

ou $$h^0 + H - h_0\left(1 - \frac{\Omega}{\omega_1}\right)^2 = h'' + \frac{aQ^2}{2g}\int\frac{\chi ds}{\omega^3},$$

en sorte que si l'on retranche de la pente absolue de la conduite, la perte de hauteur due à l'élargissement, l'équation conservera sa forme ordinaire.

Si les sections CD et GH étaient inégales, l'équation générale serait :

$$h^0 + h_0 + H - h_0\left(1 - \frac{\Omega}{\omega_1}\right)^2 = h'' + h_2 + \frac{aQ^2}{2g}\int\frac{\chi ds}{\omega^3}.$$

Considérons encore une conduite dont l'axe rectiligne soit AB (fig. 22); supposons qu'à partir du point I, la section augmente avec continuité jusqu'au point L, mais qu'en ce point le diamètre moyen de la section se réduise à GH, puis, qu'à la suite du point L, la section soit convenablement évasée pour éviter l'effet dû à la contraction, et qu'elle reste ensuite soumise à la loi de continuité. Au moment de la réduction du diamètre de EF à GH, il se produira une perte de hauteur due à la différence des vitesses; si $\omega_2$ est l'aire de la section EF, $u_2$ la vitesse correspondante, $h_2$ la hauteur due à cette vitesse, la hau-

teur perdue au passage de la section EF à la section GH, sera égale à $\frac{(u_3-u_2)^2}{2g}$, et comme la permanence du mouvement donnera $\omega_2 u_2 = \omega_3 u_3 = Q$, cette hauteur deviendra $h_3\left(1-\frac{\omega_3}{\omega_2}\right)^2 = h_2\left(\frac{\omega_2}{\omega_3}-1\right)^2$; on aurait donc $R = \frac{aQ^2}{2g}\int\frac{\chi ds}{\omega^3} + h_3\left(1-\frac{\omega_3}{\omega_2}\right)^2$, et l'équation générale du mouvement, entre les points I et L, serait :

$$h^\circ + h_\circ + H - h_3\left(1-\frac{\omega_3}{\omega_2}\right)^2 = h''' + h_3 + \frac{aQ^2}{2g}\int\frac{\chi ds}{\omega^3}.$$

Si l'élargissement brusque qui a lieu au point I était suivie d'une partie variant avec continuité, mais se terminant au point L par un rétrécissement brusque, alors l'équation générale du mouvement, entre les points I et L serait :

$$h^\circ + h_\circ + H - h^\circ\left(1-\frac{\Omega}{\omega_1}\right)^2 - h_3\left(1-\frac{\omega_3}{\omega_2}\right)^2 = h''' + h_3 + \frac{aQ^2}{2g}\int\frac{\chi ds}{\omega^3};$$

dans le cas particulier où la section CD serait égale à la section GH, et où la section EF serait constante, on aurait $\Omega = \omega_3$, $h_\circ = h_3$, $\omega_1 = \omega_2$, $h_1 = h_2$, et l'équation générale deviendrait

$$h^\circ + H - 2h_\circ\left(1-\frac{\Omega}{\omega_1}\right)^2 - h''' + \frac{aQ^2}{2g}\int\frac{\chi ds}{\omega_1^3}.$$

Considérons actuellement deux conduites de diamètres différents, ayant un axe commun, séparées par une platine percée d'un orifice que nous supposons d'abord évasé (fig. 23). Dans la conduite d'amont AC, il y aura un rétrécissement brusque suivi

d'un élargissement brusque dans la conduite d'aval; si nous désignons par $\Omega$ l'aire de la section d'amont, par $u_0$ la vitesse correspondante, par $h_0$ la hauteur due à cette vitesse; par A l'aire de l'orifice, par $u_1$ la vitesse correspondante, par $h_1$ la hauteur due à cette vitesse; par $\omega$ l'aire de la section d'aval, par $u_2$ la vitesse correspondante, par $h_2$ la hauteur due à cette vitesse;

La hauteur perdue par le rétrécissement brusque sera égale à $\left(\frac{u_0-u_1}{2g}\right)^2$, et la hauteur perdue par l'élargissement sera égale à $\left(\frac{u_1-u_2}{2g}\right)^2$, de plus, la permanence du mouvement donnant $\Omega u_0 = Au_1 = \omega u_2 = Q$, il en résulte que la hauteur perdue par le rétrécissement devient $h_0\left(1-\frac{\Omega}{A}\right)^2$, et que celle perdue par l'élargissement devient $h_1\left(1-\frac{A}{\omega}\right)^2 = h_0\frac{\Omega^2}{A^2}\left(1-\frac{A}{\omega}\right)^2$. Comme on peut négliger la résistance due au frottement sur la petite longueur qui sépare la section rétrécie de la section élargie, on aura donc

$$R = h_0\left(\left(1-\frac{\Omega}{A}\right)^2 + \frac{\Omega^2}{A^2}\left(1-\frac{A}{\omega}\right)^2\right);$$

l'équation générale du mouvement entre la section d'amont et la section d'aval sera donc

$$h' + h_0 + H = h'' + h_2 + h_0\left(\left(1-\frac{\Omega}{A}\right)^2 + \frac{\Omega^2}{A^2}\left(1-\frac{A}{\omega}\right)^2\right).$$

Dans le cas particulier où la conduite d'amont a une section constante et égale à celle de la conduite

d'aval, on a $\Omega = \omega$, $h_0 = h_2$ et $\frac{\Omega}{A}\left(1 - \frac{A}{\omega}\right) = \frac{\Omega}{A} - 1$, ce qui donne $h^0 + H = h'' + 2h_0\left(1 - \frac{\Omega}{A}\right)^2$.

Si l'orifice de la platine n'était pas évasée il faudrait remplacer A par $m$A, $m$ étant le coefficient de contraction qui convient à l'orifice, et à la forme plane, concave ou convexe de la paroi dans laquelle il est percé.

203. Après avoir déterminé les pertes de hauteur dues aux variations de l'aire des sections, dans une conduite dont l'axe est rectiligne, il conviendrait de donner les moyens d'apprécier les pertes de hauteur occasionnées par les variations de la direction de l'axe d'une conduite; mais de nombreuses expériences seraient nécessaires pour reconnaître la loi que suivent ces pertes; faute d'un nombre suffisant d'observations faites avec soin, il ne peut exister de théorie satisfaisante sur cette matière; Dubuat a cependant fait quelques expériences dont les résultats ont conduit M. Navier à proposer la formule empirique suivante pour représenter la perte de hauteur due à une conduite dont l'axe a la forme d'un arc de cercle, dont la longueur est $c$ et le rayon $r$,

$$\frac{u^2}{2g}(0.0039 + 0.0186r)\frac{c}{r^3};$$

lorsque la conduite est circulaire, on a $u = \frac{4Q}{\pi D^2}$; ce qui permet de mettre l'expression précédente sous la

forme de $0.0826\frac{Q^2}{D^4}(0.0039+0.0186r)\frac{c}{r^2}$ ; si $\delta$ représente la vitesse angulaire du liquide on a alors $u=\delta r$, ce qui change l'expression de la perte de hauteur en $\frac{\delta^2}{2g}(0.0039+0.0186r)c$ ; mais cette formule a besoin d'être confirmée par un plus grand nombre d'expériences.

L'observation a d'ailleurs fait connaître que dans la pratique, les arcs dont le rayon est d'environ dix fois le diamètre de la conduite, n'exercent qu'une résistance à peine sensible à laquelle on peut se dispenser d'avoir égard.

Si l'effet des coudes bien arrondis est à peine sensible, il n'en est pas de même des angles proprement dits, et des expériences de l'ingénieur anglais Rennie prouvent qu'un seul angle droit cause une perte supérieure au double de celle causée par quinze coudes demi-circulaires. Le même ingénieur a encore reconnu que la perte de hauteur due à la résistance des angles ou des coudes, n'est pas proportionnelle à leur nombre, car cette perte pour vingt-quatre angles droits, s'est seulement élevée à $11^m.40$ la perte d'un seul.

204. Considérons une conduite établissant une communication entre deux réservoirs maintenus à un niveau constant (fig. 24).

Appelons $h_0$ la hauteur due à la vitesse de la section qui correspond au niveau du réservoir d'amont;

$h^{\circ}$ la hauteur du niveau du réservoir sur le centre de la section d'origine de la conduite, que nous supposerons d'abord évasée;

$p_a$ la pression atmosphérique qui agit, au niveau de l'eau, sur l'unité de surface;

$h_{,}$ la hauteur due à la vitesse moyenne qui correspond à la section évasée;

$p_{,}$ la pression par unité de surface qui agit sur la section évasée;

H la pente absolue de l'axe de la conduite dont la longueur est $s$;

R la pente absolue de la ligne des résistances qui correspond à la même longueur $s$;

$p_2$ la pression par unité de surface qui agit sur la section d'aval de la conduite;

$h''$ la hauteur sur le centre de la section d'aval de la conduite du niveau de l'eau du réservoir inférieur;

$h_2$ la hauteur due à la vitesse moyenne de la section d'aval;

$h_3$ la hauteur due à la vitesse qui correspond au niveau de l'eau du réservoir d'aval.

Si l'on peut négliger la résistance due au frottement dans le réservoir d'amont, le mouvement de l'eau dans ce réservoir donnera $h_0 + h^{\circ} + \frac{p_a}{\pi} = h_{,} + \frac{p_{,}}{\pi}$;

Le mouvement dans la conduite donnera

$$h_{,} + \frac{p_{,}}{\pi} + \mathrm{H} = \mathrm{R} + h_2 + \frac{p_2}{\pi};$$

Enfin le mouvement de l'eau dans le réservoir

d'aval donnera $h_2+\frac{p_2}{\pi}=h_3+\frac{p_3}{\pi}+h''$, d'où

$$h^\circ+h_0+\frac{p_1}{\pi}+H=R+h_2+\frac{p_2}{\pi}=R+h''+h_3+\frac{p_3}{\pi}.$$

Lorsque l'on peut négliger les hauteurs $h_0$ et $h_3$ dues aux vitesses dans les sections supérieures des réservoirs, il reste

$$h^\circ+H=R+h'' \text{ et } h^\circ+\frac{p_1}{\pi}+H=R+h_2+\frac{p_2}{\pi}.$$

Si la conduite, à son extrémité, verse librement dans l'air, on a $p_2=p_1$, il reste $h^\circ+H=R+h_2$, et dans le cas particulier ou $H=R$, on a $h_2=h^\circ$; c'est-à-dire que la hauteur due à la vitesse dont l'eau est animée à l'extrémité de la conduite, est précisément égale à la hauteur du niveau de l'eau du réservoir sur le centre de la section d'origine que nous avons dit être évasée.

Lorsque la conduite n'est pas évasée à son origine, nous verrons dans le livre suivant, que la contraction a pour effet de réduire de $\frac{1}{3}$ la hauteur due à la vitesse qui aurait lieu s'il n'y avait pas de contraction; or, quand la section était évasée on avait

$$h_1=h^\circ+h_0+\frac{p_1-p_1}{\pi};$$

on aura donc lorsqu'elle ne sera pas évasée

$$h_1=\tfrac{2}{3}\left(h^\circ+h_0+\frac{p^1-p_1}{\pi}\right), \text{ ou } h^\circ+h_0+\frac{p_1-p_1}{\pi}=1.50h_1;$$

ce qui donne $\frac{p_1-p_1}{\pi}=h^\circ+h_0-1.50h_1$.

Le mouvement de l'eau dans la conduite donne toujours $h_1 + \frac{p_1}{\pi} + H = R + h_2 + \frac{p_2}{\pi}$, mais dans le cas le plus général $\frac{p_2}{\pi} = h'' + \frac{p_3}{\pi}$, on doit donc en conclure que

$$\frac{p_1 - p_3}{\pi} = R - H + h_2 + h'' - h_1 = h^\circ + h_0 - 1.50h_1,$$

ou encore $R + 0.50h_1 = h^\circ + h_0 + H - (h'' + h_2)$.

Si l'on peut négliger la hauteur due à la vitesse qui correspond au niveau du réservoir d'amont, et si de plus la conduite a une section constante, on a $h_0 = o$ et $h_1 = h_2$, alors il reste

$$R + 1.50h_1 = h^\circ + H - h''.$$

Enfin si la conduite dont la section est constante, verse librement dans l'air, on a encore $h'' = o$, et il reste $R + 1.50h_1 = h^\circ + H$.

On désigne ordinairement la pente absolue de la ligne des pressions par $\zeta$, c'est-à-dire que l'on fait $H + h^\circ - h'' = \zeta$, on a alors, dans le cas le plus général, $R + 0.50h_1 = \zeta + h_0 - h_2$; si l'on peut négliger la valeur de $h_0$ et si la conduite a une section constante, on a $h_0 = o$ et $h_1 = h_2$, ce qui donne $\zeta = R + 1.50h_1$: dans les cas ordinaires de pratique, $h_1$ étant fort petit, on néglige $1.50h_1$, et on se contente de $\zeta = R$.

205. Pour déterminer la pression que supporte un point quelconque d'une conduite, il faut se rappeler qu'en appelant $p$ cette pression par unité de surface, et par $h^\circ$ la hauteur piézomètrique correspondante,

on a toujours $p = p_a + \pi h^n$; comme la pression atmosphérique est toujours donnée, on connaîtra $p$ lorsque l'on pourra déterminer la valeur de $h^n$; pour trouver cette valeur, appelons :

$h_n$ la hauteur due à la vitesse moyenne qui correspond au point où l'on veut apprécier la pression ;

$s_n$ la longueur de la partie de l'axe comprise entre l'origine et le point dont on s'occupe ;

$H_n$ la pente absolue, sur cette longueur, de l'axe ou de la ligne des centres ;

$R_n$ la pente absolue de la partie correspondante de la ligne des résistances ;

$h^o$ étant la hauteur du niveau du réservoir au-dessus du centre de la section d'origine ;

$h_,$ la hauteur due à la vitesse moyenne dans cette section supposée non évasée.

Le mouvement, dans la partie $s_n$ de la conduite, donnera $h^o + H_n - (h^n + h_n) = R_n + 0.50 h_,$.

Les sections de la conduite devant être données, la permanence du mouvement fera connaître $h_n$ en fonction de $h_,$, on pourra donc déterminer $R_n$, ce qui donnera $h^n = h^o + H_n - R_n - 0.50 h_, - h_n$.

Lorsque le mouvement est uniforme, cette valeur se simplifie ; en effet, on a d'abord $h_n = h_,$, et comme la résistance est proportionnelle à la longueur, si l'on désigne par R cette résistance sur une partie connue $s$ de la conduite, on aura $R_n : R :: s_n : s$, d'où $R_n = R\frac{s_n}{s}$ ; nous savons d'ailleurs que l'on a

$R + 1.50h_{,} = \zeta$, ce qui donne $R_n = (\zeta - 1.50h_{,})\frac{s_n}{s}$, et par suite $h^n = h^o + H_n = \zeta\frac{s_n}{s} - 1.50h_{,}\left(1 - \frac{s_n}{s}\right)$.

Lorsque l'on néglige le dernier terme, il reste $h^n = h^o + H_n - \zeta\frac{s_n}{s}$, ce qui donne, pour la pression, $p = p_a + \pi\left(h^o + H_n - \zeta\frac{s_n}{s}\right)$, et pour la différence de niveau des colonnes piézométriques, qui est égale à la pente absolue de la ligne des pressions,

$$H_n + h^o - h^n = \zeta\frac{s_n}{s}.$$

Comme il est toujours facile, dans la pratique, d'avoir des conduites dont l'origine soit évasée, il y a tout avantage à les prendre telles, l'équation du mouvement donne alors $h^n = h' + h_{,} + H_n - R_n - h_n$, et, dans le cas du mouvement uniforme,

$$h^n = h' + H_n - R_n;$$

équation fort simple et d'une grande utilité pratique, car les conduites ayant ordinairement une section circulaire et constante, le mouvement est nécessairement uniforme dans des parties dont l'étendue est souvent considérable.

L'équation $h^n + R_n = h' + H_n$ fait de suite reconnaître que la pression n'influe pas sur la résistance, car, si l'on prend $h' = h^n$, quelle que soit la grandeur de ces quantités ou l'énergie de la pression, on aura toujours $R_n = H_n$, c'est-à-dire que la résistance ne dépend que de la pente absolue lorsque les pres-

sions sont égales, et seulement de la différence de ces pressions lorsqu'elles sont inégales.

Une conduite qui débouche dans l'eau débitera le même volume, sous la même charge, quelle que soit la hauteur de l'eau qui presse sur ses sections extrêmes; il suffit que cette hauteur soit égale aux deux extrémités, ou si les hauteurs de l'eau sont inégales, que leur différence reste constante.

206. Quand la section d'une conduite varie avec continuité, soit qu'elle diminue, soit qu'elle augmente, on peut appliquer avec confiance les équations que nous avons données, tant que le liquide coule à pleine section.

Lorsque la section diminue, et que la ligne des centres a une courbure telle que sa pente soit dans le sens du mouvement, le liquide coule toujours à pleine section; mais lorsque la ligne des centres est ondulée et présente des points maxima dont le niveau se rapproche de celui du réservoir, alors la pression diminue, et comme l'eau contient toujours de l'air, cet air se dégage petit à petit et se réunit dans la partie de la conduite qui forme le sommet de la courbure où la pression est quelquefois plus faible que la pression atmosphérique; ces amas d'air troublent d'abord la régularité du mouvement et peuvent finir par l'arrêter.

Pour assurer la permanence du mouvement, il faut donc faire en sorte que la pression soit toujours plus forte que la pression atmosphérique, et avoir

soin d'établir, aux points maxima, une communication avec l'air extérieur, au moyen d'un évent ou d'un tube ouvert à sa partie supérieure.

Si, sur quelques points de la conduite, la valeur $h^n$, trouvée dans le numéro précédent, était négative, cela indiquerait que, vers ces points, le liquide cesse de couler à pleine section, et que le mouvement a lieu comme dans un courant découvert.

Dans une conduite dont l'axe est rectiligne, le liquide cessera de couler à pleine section lorsque la charge, à l'origine, sera moindre que la hauteur due à la vitesse du mouvement uniforme qui résulte de la pente; mais quand une conduite a un petit diamètre, l'adhérence contre la paroi contribue à maintenir la section pleine, et il est rare que l'eau se détache de la paroi supérieure pour livrer passage à l'air.

Quand un tuyau verse librement dans l'air sous une faible charge, l'écoulement cesse d'avoir lieu à pleine section, sur une certaine longueur qui précède la sortie de l'eau; et, si la conduite ne doit avoir qu'une faible pente, pour obliger le liquide à couler à pleine section, il convient, quand cela est possible, de faire plonger sous l'eau l'extrémité de cette conduite.

207. Lorsqu'une conduite à section circulaire a un diamètre constant, le mouvement est nécessairement uniforme, et les questions auxquelles, dans cette circonstance, le mouvement de l'eau peut donner

lieu, dépendent du débit Q, du diamètre D, de la pente absolue R, de la ligne des résistances ou plutôt du rapport $j = \frac{R}{s}$, et enfin de la hauteur due à la vitesse $h$.

Pour résoudre ces questions, on a les relations :

$$j = \frac{R}{s} = \frac{4ah}{D} \text{ et } h = \frac{Q^2}{2g\omega^2} = \frac{8Q^2}{\pi^2 g D^4}.$$

Lors donc que l'on connaîtra deux des quatre quantités Q, $\omega$, $h$ et $j$, on déterminera facilement les deux autres. Les diverses combinaisons de ces quantités portent à six le nombre des questions que l'on peut avoir à résoudre. Nous présentons, dans le tableau suivant, la solution générale de ces questions.

*Solutions générales des questions sur le mouvement permanent et uniforme de l'eau dans les tuyaux de conduite.*

| Numéros d'ordre. | Énoncé général de chaque question. | Quantités données. | Quantités à déterminer. | Solution générale de chaque question. |
|---|---|---|---|---|
| 1 | Le débit et le diamètre étant donnés : *Déterminer la hauteur due à la vitesse et le rapport* $\frac{R}{s}=j$. | Q, D | $h$, $j$ | $h=\frac{8Q^2}{\pi^2gD^4}$, $j=\frac{4ah}{D}$, $a=0.007848$, $\pi^2g=96.721$, $\frac{1}{\pi^2g}=0.01017$. |
| 2 | Le débit et le rapport $\frac{R}{s}=j$ étant donnés : *Déterminer la hauteur due à la vitesse et le diamètre.* | Q, $j$ | $h$, D | $h=\frac{8Q^2}{\pi^2gD^4}=\frac{Dj}{4a}$, $D^5=\frac{32a}{\pi^2g}\times\frac{Q^2}{j}$, $\frac{8a}{\pi^2g}=0.000649$. |
| 3 | Le débit et la hauteur due à la vitesse étant donnés : *Déterminer le diamètre et le rapport* $\frac{R}{s}=j$. | Q, $h$ | D, $j$ | $D^4=\frac{8}{\pi^2g}\times\frac{Q^2}{h}$, $j=\frac{4ah}{D}$, $\sqrt[5]{\frac{32a}{\pi^2g}}=\sqrt[5]{0.002596}=0.304$, $\sqrt[4]{\frac{8a}{\pi^2g}}=\sqrt[4]{0.000649}=0.1596$. |
| 4 | Le diamètre et le rapport $\frac{R}{s}=j$ étant donnés : *Déterminer le débit et la hauteur due à la vitesse.* | D, $j$ | Q, $h$ | $h=\frac{Dj}{4a}$, $Q^2=\frac{\pi^2g}{8}\times D^4h$, $Q=\frac{\pi D^2}{4}\sqrt{2gh}$. |
| 5 | Le diamètre et la hauteur due à la vitesse étant donnés : *Déterminer le débit et le rapport* $\frac{R}{s}=j$. | D, $h$ | Q, $j$ | $j=\frac{4ah}{D}$, $Q^2=\frac{\pi^2g}{8}D^4h$. |
| 6 | La hauteur due à la vitesse et le rapport $\frac{R}{s}=j$ étant donnés : *Déterminer le débit et le diamètre.* | $h$, $j$ | Q, D | $D=\frac{4ah}{j}$, $Q^2=\frac{\pi^2g}{8}D^4h$. |

208. Nous pouvons maintenant faire quelques applications numériques, afin de comparer les résultats auxquels nous parviendrons, avec ceux obtenus par les ingénieurs qui se sont occupés d'hydraulique :

1° *Une conduite de* $0^m.05$ *de diamètre doit verser librement dans l'air un certain volume d'eau animé de* $1^m.00$ *de vitesse par seconde, on demande quelle doit être la valeur du rapport* $\frac{R}{s}=j$, *et celle du débit* Q ?

La relation $j=\frac{4ah}{D}$ donne d'abord $j=0.032$, et la relation $Q=v\omega=\omega\sqrt{2gH}=\frac{\pi^2 D}{4}\sqrt{2gh}$ donne ensuite

$$Q=0^m.00196=1^l.96.$$

2° *Une conduite a* $0^m.25$ *de diamètre et* $1450^m.00$ *de longueur, on demande quel volume elle débitera sous une charge de* $5^m.32$ ?

Par les données de la question on a $D=0.25$,

$$j=\frac{R}{s}=\frac{5.32}{1450}=0.00367.$$

Il s'agit de déterminer la hauteur due à la vitesse $h$ et le débit Q; pour y parvenir on a

$$h=\frac{Dj}{4a}=\frac{0.000916}{0.0314}=0.0291,$$

$$Q=\frac{\pi D^2}{4}\sqrt{2gh}=0.049\times0.7556=0^m.0370;$$

M. d'Aubuisson, qui a traité la même question par la formule de M. de Prony, a trouvé $Q=0.0388$.

3° *On demande le diamètre que doit avoir une con-*

*duite de* $757^m.00$ *de long, qui doit mener* $0^m.089$ *par seconde, sous une charge de* $1^m.00$?

Par les données de la question on a $Q=0.089$, $j=\frac{R}{s}=\frac{1}{757}=0.001328$, il s'agit de déterminer le diamètre D et la hauteur due à la vitesse $h$; pour y parvenir on a

$$D^5=\frac{32a}{\pi^2 g}\times\frac{Q^2}{j}=0.002596\frac{Q^2}{j} \text{ et } \frac{Q^2}{j}=5.996,$$

ce qui donne $D=0.304\times 1.43=0.434$,

$$h=\frac{Dj}{4a}=\frac{0.000573}{0.0314}=0.015;$$

M. d'Aubuisson, qui a traité la même question, a trouvé $D=0.4306$.

4° *On demande le diamètre que doit avoir un orifice circulaire percé dans une mince platine, adaptée à l'extrémité d'une conduite de* $0^m.08$ *de diamètre et de* $532^m.00$ *de long, devant débiter deux litres par seconde, sous une charge de* $4^m.50$?

D'après les données de la question on a $Q=0.002$, $D=0.08$, $s=532^m.00$; or l'équation générale de la hauteur perdue en résistance, étant

$$R=js=\frac{32a}{\pi^2 g}\times\frac{Q^2}{D^5}s=0.002596\times\frac{Q^2}{D^5}s,$$

et comme $\frac{Q^2}{D^5}$ est, dans cette circonstance, égal à $0^m.0976$, il en résulte que $j=0.00317$, et que $R=1.676$; la hauteur due à la pression qui agit sur

la dernière section est donc égale à

$$4.50 - 1.676 = 2.324;$$

et comme c'est cette pression qui doit produire la vitesse dans la section contractée, on aura pour cette vitesse $v = 6.75$.

Le rayon de l'orifice étant $r$, l'aire de cet orifice sera $\pi r^2$, et l'aire de la section contractée sera $m\pi r^2$, le débit sera par conséqueut $m\pi r^2 v = Q = 0.002$, et comme $m = 0.62$, on trouve $r^2 = 0.000152$ et $r = 0.0123$; M. d'Aubuisson, qui a traité la même question, a trouvé $r = 0.0117$.

5° *Une conduite de* $100^m.00$ *de longueur développée, et de* $0^m.05$ *de diamètre, débite trois litres par seconde, on demande la perte de hauteur due à la résistance des parois?*

D'après les données de la question, on a pour la vitesse moyenne $u = \frac{0.003}{0.00196} = 1.52$, ce qui donne $h = 0.11777$ et $j = 0.0739$, d'où $R = js = 7.39$; cette perte, qui est considérable, fait voir avec quelle rapidité la résistance croît avec la vitesse, et combien il est important de réduire la vitesse autant pour diminuer la résistance que pour éviter les chocs et les effets de béliers qui ont lieu quand le mouvement est brusquement interrompu par la fermeture des robinets.

209. Lorsque l'on doit établir des prises d'eau sur différents points d'une conduite, on détermine

son diamètre de manière que la pression qui a lieu à chaque prise d'eau suffise pour assurer le débit.

Lorsque l'on connaît le point précis où doit se trouver l'orifice, on fait en sorte que l'eau puisse s'élever de quelques décimètres, au-dessus de ce point; ainsi, pour les bornes-fontaines, dont le débit est de deux litres par seconde, il suffit d'une pression de $0^m.40$ à $0^m.50$ au-dessus de cet orifice, qui est lui-même à $0^m.50$ au-dessus du sol, il faut donc que l'eau puisse s'élever près de chaque borne à $1^m.00$ au-dessus du sol, pour que le débit n'éprouve pas d'interruption, et comme les conduites secondaires, celles sur lesquelles se branchent les tuyaux de distribution portant les orifices, sont ordinairement enterrées de $1^m.00$ au-dessous de la surface du sol, il faut qu'en chaque point de prise d'eau la hauteur due à la pression dans la conduite soit de $2^m.00$.

210. Lorsque l'eau passe d'une conduite principale dans un branchement, et d'un branchement dans un sous-branchement, il se produit une certaine perturbation dans le mouvement qui occasionne une perte de hauteur; mais cette perte, toujours très-faible par rapport à celle qui provient de la résistance des parois, peut être négligée sans qu'il puisse en résulter d'erreur; il n'en est pas de même des effets produits par les prises d'eau d'un branchement de distribution qui se termine par l'orifice. Ces branchements s'implantent perpendiculairement sur les conduites, sauf à être ensuite déviés par des

coudes plus ou moins forts; l'axe du branchement étant ainsi perpendiculaire à l'axe de la conduite, la composante de la vitesse dans la conduite, suivant la direction du branchement, est nulle, et la hauteur due à la vitesse est entièrement perdue. Le liquide n'entre dans le branchement qu'en vertu de la pression qui a lieu dans la conduite, et qui correspond au point de prise d'eau; à l'entrée même du branchement, il y a un autre perte de hauteur due à la contraction et à un effet particulier de la prise d'eau, perte que l'on croit avoir reconnue être à peu près double de la hauteur due à la vitesse; cette perte ajoutée à la première, donne à chaque prise d'eau une perte de hauteur qui paraît triple de celle qui est due à la vitesse; une de ces hauteurs est perdue par le changement de direction et les deux autres par l'effet de la prise d'eau.

Nous devons ajouter que toute inexactitude sur les pertes de hauteur causées par les prises d'eau, ainsi que sur celles qui proviennent des coudes et des changements de direction, ne peuvent avoir aucune conséquence fâcheuse dans les applications, car la somme de toutes ces pertes est toujours très-petite, relativement à celle qui est due au frottement contre les parois.

Les prises d'eau pour les branchements de distribution ne produisent qu'un effet négligeable sur la conduite principale en aval des points où elles sont faites; ainsi une prise d'eau faite sur une conduite

principale, ne diminue pas sensiblement la pression sur les points qui sont en aval de celui où elle est ouverte.

211. Lorsqu'une conduite, sur sa longueur, doit alimenter divers orifices d'un débit déterminé; si l'on connaît les distances qui séparent les prises d'eau qui correspondent aux orifices, et si la conduite doit avoir un diamètre constant, on considérera cette conduite comme devant livrer passage au volume total, et on en déterminera le diamètre par la condition que la somme des hauteurs perdues soit moindre que la différence de niveau entre le réservoir d'alimentation et le dernier orifice, afin qu'à la dernière prise d'eau, il y ait une pression suffisante pour assurer le débit.

Si l'économie engage à diminuer le diamètre à mesure que le volume à débiter devient plus petit, on considérera chaque intervalle entre deux prises d'eau comme une conduite particulière, en commençant par la partie supérieure qui doit livrer passage au volume total, et l'on déterminera le diamètre de chaque partie par la condition que la somme des hauteurs perdues à l'extrémité de la partie dont on s'occupe, soit moindre que la différence de niveau entre le réservoir d'alimentation et l'orifice qui doit se trouver à l'extrémité de cette partie, afin qu'à chaque prise d'eau, il y ait une pression suffisante pour assurer le débit.

Dans les deux questions qui précèdent, on connaît

l'axe de la conduite par la position que cette conduite doit occuper, on connaît de plus la ligne des pressions par la hauteur des orifices, il est donc toujours facile de déterminer le diamètre par la relation

$$h^{\circ} + H - h' = R = \frac{32aQ^2}{\pi^2 g D^5} s.$$

Occupons-nous encore de la distribution que l'on peut faire au moyen d'une conduite alimentée par ses deux extrémités.

Pour résoudre cette question il faut connaître le débit de distribution que doit fournir chaque partie et le débit que peut donner chaque réservoir; on doit d'ailleurs avoir par un nivellement les hauteurs relatives des différents points, ce qui permet de tracer l'axe de la conduite; on rapporte ensuite la ligne des pressions en supposant que la conduite soit seulement alimentée par l'une de ses extrémités, puis la ligne des pressions en supposant que la conduite soit alimentée par l'autre extrémité, l'intersection de ces deux lignes fait connaître le point précis où les pressions dues aux réservoirs d'alimention se feront équilibre.

On a d'ailleurs pour déterminer les distances verticales qui séparent la ligne des pressions de l'axe de la conduite $h^{\circ} + H = R + h' + h_{,}$.

Le point d'intersection des lignes de pressions étant déterminé, on n'a plus à s'occuper que d'une distribution au moyen d'une conduite d'un diamètre constant alimentant les débits de plusieurs orifices.

212. Lorsqu'une distribution d'eau doit se faire au moyen d'un système de conduites alimentées par un seul réservoir, le plan du système étant donné ainsi que le niveau du réservoir, les hauteurs des orifices et le volume que chaque orifice doit débiter, on connaît les nœuds du système, ou les points de branchement des conduites principales, ainsi que le volume total que doit recevoir la première partie du système qui forme le tronc principal, on connaît encore les distances qui séparent les orifices, les longueurs de chaque partie de conduite, la longueur de ses coudes, etc. ; on peut alors déterminer le diamètre de la première partie ; en effet les hauteurs des orifices les plus élevés font connaître approximativement la pression que doit éprouver l'extrémité de cette partie, et dans l'équation $h^{\circ} + H = R + h' + h_{,}$, on connaît R et $h_{,}$, en fonction du diamètre, et comme les autres quantités sont données, il est facile d'obtenir par le calcul la valeur du diamètre.

Dans l'une des parties qui se branchent sur le tronc principal, le diamètre se déterminera encore plus facilement, car on aura alors $h' + H_{,} = R_{,} + h''$, équation qui donnera la valeur de $R_{,}$, à l'aide de laquelle on déterminera celle du diamètre.

En continuant ainsi de branchement en branchement, on arrivera jusqu'aux limites du système, ou aux petits tuyaux qui se terminent aux orifices.

Si le système devait être alimenté par deux ou plusieurs réservoirs, on chercherait dans les conduites

susceptibles d'être alimentées par deux réservoirs, les points où les pressions opposées se font équilibre; ces points seraient les limites de l'alimentation des deux réservoirs dans chaque conduite, et leur ensemble ferait connaître le périmètre de l'alimentation due à chaque réservoir; le système entier pourrait alors être considéré comme composé de plusieurs systèmes indépendants.

Pour abréger les nombreux calculs auxquels donne toujours lieu toute distribution d'eau par un système de conduites, plusieurs ingénieurs, et notamment MM. de Prony, Morin, Mary, Cousinery et Fourneyron, ont publié des tables qui permettent de déterminer avec une approximation suffisante pour la pratique, les éléments d'un système de conduites.

213. Nous croyons devoir ajouter quelques indications générales propres à faciliter les distributions d'eau dans les villes.

Supposons que l'on puisse disposer d'un volume d'eau connu, et que l'on veuille le distribuer sur les différents points d'une ville. Les points d'écoulement et les quantités d'eau à verser sur chacun étant fixés de manière à satisfaire aux besoins des habitants, on demande de déterminer les dimensions des conduites de distribution.

On déterminera d'abord par un nivellement les hauteurs des points donnés, au-dessous du niveau ordinaire que doit avoir l'eau du réservoir d'alimentation; ces hauteurs serviront à faire connaître les

hauteurs dues aux pressions nécessaires qui doivent avoir lieu aux différents points de prise d'eau pour assurer le débit que doit donner chaque orifice.

On tracera ensuite sur le plan les conduites et leurs branchements, on en mesurera les longueurs ainsi que les angles de leurs coudes; on augmentera ensuite du tiers ou de la moitié la quantité d'eau à conduire, afin d'avoir égard aux aspérités que les parois présentent, aux irrégularités dans la forme des conduites, à la difficulté de joindre les tuyaux sans saillie, de donner sans brisures à l'axe des conduites une direction droite ou courbe, afin aussi de prévoir les effets des dépôts que l'on ne parvient pas toujours à prévenir, et ceux dus à d'autres circonstances qui en diminuant la section tendent à réduire d'un quart le débit que les conduites devraient donner. M. d'Aubuisson nous apprend que les ingénieurs des eaux de Paris, pour prévenir tout mécompte, diminuent d'un tiers les coefficients numériques de la formule des débits.

Dans les grandes distributions d'eau, on a soin de placer les conduites principales dans des galeries souterraines, afin que leur inspection, leur entretien et leurs réparations soient plus faciles; on enterre ordinairement les conduites secondaires à un mètre sous le pavé des rues.

M. d'Aubuisson conseille de doubler les conduites principales, afin que l'eau ne puisse jamais manquer aux points les plus importants de la distribution; si

l'une des conduites a besoin de réparations, l'autre continue le service; le volume d'eau versé est plus faible, il est vrai, mais aucune ligne n'en est entièrement privée.

Il faut encore avoir soin de prendre les tuyaux d'un calibre un peu supérieur à celui que le calcul a donné, afin de prévoir les engorgements causés par les dépôts et se réserver, en cas d'incendie, la faculté d'augmenter momentanément le débit.

214. Pour justifier la préférence que nous donnons à l'équation $Dj = 4ah$, nous allons comparer les résultats auxquels elle conduit, avec ceux obtenus par les formules de Prony; à cet effet nous ferons observer que ce savant ingénieur regardait comme admissible, en pratique, la formule $u = 26.79\sqrt{Dj}$, qui diffère à peine de celle que nous préférons; mais pour que l'on ne puisse avoir aucun doute sur l'exactitude de cette dernière formule, nous présentons dans le tableau suivant, les valeurs de $\sqrt{Dj}$ calculées par la formule générale de Prony,

$$u = -0.025 + \sqrt{0.00062 + 717.8Dj},$$

par celle que ce savant a proposée pour les cas ordinaires de pratique qui est $u = 26.79\sqrt{Dj}$, enfin par la formule que nous préférons $Dj = 4ah$, qui revient à $u = 25\sqrt{Dj}$. On peut voir par ce tableau, que les valeurs obtenues de cette dernière équation ne présentent que des différences insignifiantes avec celles obtenues des formules de Prony :

| Valeur de $u$. | $0^m.05$ | $0^m.10$ | $0^m.20$ | $0^m.30$ | $0^m.40$ | $0^m.50$ | $1^m.00$ | $2^m.00$ | $3^m.00$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sqrt{Dj}$ obtenue de l'équation complète de Prony. | 0.00261 | 0.00456 | 0.00841 | 0 01204 | 0 0158 | 0.0195 | 0.0382 | 0.0756 | 0.1109 |
| $\sqrt{Dj}$ obtenue de l'équation $u=26.79\sqrt{Dj}$ donnée par de Prony. | 0.00186 | 0 00372 | 0.00744 | 0.01116 | 0 01488 | 0.0186 | 0.0372 | 0.0744 | 0.1116 |
| $\sqrt{Dj}$ obtenue de l'équation $u=25.00\sqrt{Dj}$ que nous préférons. | 0.002 | 0.004 | 0.008 | 0 012 | 0.016 | 0.02 | 0.04 | 0.08 | 0.12 |

215. Nous terminerons ce qui a rapport au mouvement de l'eau dans les conduites en donnant une solution fort simple d'une question qui paraît avoir embarrassé quelques hydrauliciens.

Soit une conduite AB (fig. 25), alimentée par un réservoir A, suivie de deux branches BC et BC', aboutissant aux bassins C et C' : la position de l'axe des conduites est donnée, on connaît donc la longueur L de la conduite principale, et celles de ses branches $l$ et $l'$ ; un nivellement a de plus fait connaître les pentes absolues H, $H_0$ et $H_{,}$, qui correspondent à ces longueurs, ainsi que la hauteur $h^0$ du niveau du réservoir au-dessus du centre de la section d'origine de la conduite principale, et les hauteurs $h'$ et $h''$ de l'extrémité des branches, au-dessous du niveau des bassins. On connaît encore les débits $q$ et $q'$ de chacune des deux branches, et par conséquent le

débit $Q=q+q'$ de la conduite principale, on demande de déterminer le diamètre de cette conduite principale et les diamètres $d$ et $d'$ de chacune de ses branches.

Désignons par R la hauteur perdue en résistance, sur la conduite principale;

Par $r$ et $r'$ les hauteurs perdues sur chacune des deux branches;

Par $h_0$, $h_1$ et $h_2$ les hauteurs dues aux vitesses que l'eau aura dans la conduite principale et dans chacune de ses branches;

Par $y$ la hauteur due à la pression qui aura lieu au point B où a lieu le branchement.

Si, comme on le fait ordinairement, nous négligeons d'abord les hauteurs dues aux vitesses, qui sont toujours très-faibles, afin de faciliter la solution de la question, le mouvement de l'eau dans la conduite principale, dont l'origine est supposée évasée, donnera $h^0+H=R+y$; le mouvement de l'eau dans la première branche donnera $y+H_0=r+h'$, et dans la seconde $y+H_1=r'+h''$, l'élimination de $y$ fera obtenir $h^0+H+H_0=R+r+h'$, $h^0+H+H_1=R+r'+h''$ et $H_0-H_1=r+h'-(r'+h'')$. Si l'on prolonge la première branche sur l'axe de la conduite principale, on aura alors une conduite simple, et si l'on désigne par $R_0$ la hauteur perdue en résistance sur la partie de cette conduite qui remplace la conduite principale, on devra avoir $h^0+H+H_0=R_0+r+h'$; cette équation comparée à la première de celles trouvées

ci-dessus donne $R = R_{,,}$ et par conséquent $\frac{Q^2}{D^5} = \frac{q^2}{d^5}$; on trouverait de même $\frac{Q^2}{D^5} = \frac{q'^2}{d'^5}$, et par suite

$$\frac{Q^2}{D^5} = \frac{q^2}{d^5} = \frac{q'^2}{d'^5},$$

relation très-simple qui doit exister entre les diamètres des différentes conduites d'un même système, laquelle donne $\frac{D}{d} = \sqrt[5]{\left(\frac{Q}{q}\right)^2}$. On détermine ensuite le diamètre de la première branche par la relation

$$R_0 + r = h^0 + H + H_0 - k' = \frac{32aq^2(L+l)}{g\pi^2 d^5},$$

dans laquelle $d$ étant seule inconnue, on en obtient facilement la valeur; $d$ étant ainsi déterminé permettra de calculer la valeur de D et par suite celle de $d'$.

Comme la relation

$$R_{,} + r' = h^0 + H + H_{,} - h'' = \frac{32aq'^2(L+l')}{g\pi^2 d'^5}$$

donnera aussi une valeur pour $d'$, il en résulte que la question loin d'être indéterminée, comme plusieurs ingénieurs paraissent le croire, est au contraire plus que déterminée et qu'elle ne sera susceptible de solution que quand la pression à l'extrémité de toute autre branche que celle que l'on aura d'abord choisie ne sera pas obligatoire.

Si l'on n'eût pas négligé les hauteurs dues aux vitesses, on serait parvenu au même résultat; en effet

le mouvement de l'eau dans la conduite principale aurait donné $h^{\circ}+H=R+y+h_{\circ}$, le mouvement dans la première branche donnerait comme ci-dessus $y+H_{\circ}=r+h'$, d'où $H+h^{\circ}+H_{\circ}=R+r+h'+h_{\circ}$.

Si nous prolongeons la conduite principale suivant l'axe de la première branche, nous aurons alors une conduite simple dont la longueur sera $L+l$, et en désignant par $(r)$ la hauteur perdue en résistance sur la partie de cette conduite qui remplace la première branche, nous aurons $h^{\circ}+H+H_{\circ}=R+(r)+h'+h_{\circ}$; cette équation comparée à la précédente donne $r=(r)$, d'où encore $\frac{q^2}{d^5}=\frac{Q^2}{D^5}$; propriété fort remarquable et dont personne avant nous n'avait fait la remarque.

## LIVRE IV.

*Ecoulement de l'eau par des ouvertures, tels qu'orifices, pertuis, déversoirs, ponts, etc.*

216. Lorsqu'un liquide est contenu dans un vase ou réservoir, sa surface est horizontale et tout le système est en équilibre; mais si l'on pratique une ouverture au fond ou sur les côtés de ce vase, l'équilibre est rompu, le liquide sort de l'ouverture où toutes les molécules de la masse tendent à se porter, avec des vitesses dont l'intensité dépend de la pression ou de la hauteur du niveau de l'eau au-dessus du centre de l'ouverture, dont les directions dépendent principalement de la forme de la paroi sur laquelle se trouve l'ouverture, et du rapport entre l'aire de cette ouverture et celle de la section du vase ou réservoir qui en est proche.

Si, par exemple, l'ouverture, étant très-petite, se trouvait transportée au milieu de la masse liquide, les molécules y afflueraient de toutes parts avec des vitesses dirigées suivant les rayons d'une sphère dont le centre se confondrait avec celui de cette ouverture. Si le vase était cylindrique et que l'ouverture fût précisément la section du tuyau, les vitesses des molécules seraient toutes parallèles à l'axe du cylindre.

Nous allons essayer de déterminer les lois de l'é-

coulement de l'eau à sa sortie des diverses ouvertures en usage dans la pratique ; pour y parvenir plus facilement, nous ferons observer :

Que la hauteur du niveau de l'eau, au-dessus du centre de l'ouverture, étant considérable, l'ouverture, qui dans ce cas prend le nom d'*orifice*, peut être très-petite par rapport à la section du vase ou réservoir, ou encore être dans un rapport déterminé avec cette section ;

Que la hauteur de la charge étant peu considérable et même faible, l'aire de l'ouverture peut être très-petite par rapport à la section du vase, ou être dans un rapport déterminé avec cette section.

Nous aurons donc à étudier les circonstances de l'écoulement de l'eau par une ouverture :

1° Lorsque, la charge étant considérable, l'aire de l'ouverture est très-petite ;

2° Lorsque, la charge étant considérable, l'aire de l'ouverture est dans un rapport déterminé avec celle de la section du vase ou du réservoir ;

3° Lorsque, la charge étant faible, l'aire de l'ouverture est très-petite ;

4° Lorsque, la charge étant faible, l'aire de l'ouverture est dans un rapport déterminé avec celle de la section du vase ou réservoir.

217. Lorsque l'eau sort d'un vase par un orifice percé dans une mince paroi, et que la hauteur ou la charge, sur le centre de cet orifice, est considérable, relativement à son diamètre ; l'expérience apprend

que les molécules, à partir de la surface, descendent d'abord suivant des lignes à peu près verticales; mais, étant arrivées à une distance de l'orifice égale à environ deux fois son diamètre, elles se dirigent de tous côtés vers cet orifice, et, lorsqu'il est horizontal, il n'y a que le filet qui correspond au centre qui conserve, en le franchissant, une direction verticale, tous les autres ont des directions d'autant plus inclinées qu'ils sont plus près des bords. Après leur sortie, ces filets tendent à conserver leurs directions respectives, d'où il suit qu'ils forment une veine qui diminue de grosseur jusqu'à ce que, par l'effet de leurs réactions mutuelles, leurs directions soient devenues sensiblement parallèles : c'est ce phénomène que l'on appelle la *contraction de la veine fluide*.

Lorsque l'on fait usage d'un vase transparent et d'une eau chargée de matières tenues en suspension, on rend sensible à la vue la convergence des filets avant leur passage par l'orifice; on voit alors les molécules se diriger de toutes parts vers l'orifice, et s'y précipiter d'un mouvement accéléré; on les voit encore conserver, après leur sortie et sur une petite distance, les convergences qu'elles avaient dans l'intérieur du vase.

Lorsque l'orifice est circulaire, la veine forme une espèce de tronc de cône ou plutôt d'hyperboloïde, dont la grande base est l'orifice, et dont la petite est la section où la veine éprouve la plus grande contrac-

tion. La distance, entre ces deux bases, varie avec la grandeur de l'orifice; quand cet orifice est très-petit, la distance, dont il s'agit, est égale à son diamètre; quand cet orifice est moins petit, lorsqu'il est, par exemple, de deux centimètres et au-dessous, la section de plus grande contraction se rapproche de la paroi, et la distance, entre les deux bases de la veine, est alors égale au demi-diamètre de l'orifice.

218. Tous les effets de la contraction sont une suite de la convergence des filets, laquelle ne dépend, lorsque la charge est considérable et l'orifice petit, que de la forme de la paroi; voici d'ailleurs, dans la circonstance qui nous occupe, les résultats des principales observations sur les effets de la contraction.

On a d'abord reconnu que la vitesse qui correspond à la section contractée est à très-peu près due à la hauteur de la charge, en sorte que l'écoulement a lieu comme si, à l'orifice réel, on eût substitué un orifice d'un diamètre égal à celui de la section contractée, et que les filets sortissent dans des directions parallèles et perpendiculaires au plan du nouvel orifice, ou qu'il n'y eût point de contraction. On a ensuite cherché à déterminer, par des mesures directes et pour des orifices percés dans une paroi *plane* et *mince*, le rapport entre le diamètre de l'orifice et celui de la section contractée. Michelotti fils, opérant sur de gros jets obtenus sous de fortes charges, a trouvé que ce rapport était constant et égal à $0^m.787$.

Le rapport entre les diamètres étant de 0.787, celui entre les aires des sections en sera le carré, il sera donc égal à 0.618; c'est ce rapport entre les aires des sections que l'on désigne ordinairement par *m*.

Mais, d'après de nombreuses expériences faites sur les orifices percés dans une paroi plane et mince, qui se présentent le plus fréquemment dans la pratique, on est porté à distinguer :

1° Les orifices dont le diamètre moyen surpasse $0^m.015$ environ;

2° Ceux dont le diamètre est au-dessous de cette quantité.

Dans le premier cas, la valeur du rapport *m*, entre les aires des sections, est de $0^m.618$, lorsque la charge, sur le centre de l'orifice, est au moins égale à cent fois le diamètre de cet orifice; lorsque la charge diminue, *m* augmente un peu et devient égal à $0^m.625$, quand cette charge est encore égale à dix fois le diamètre.

Dans le deuxième cas, la valeur de *m* augmente sous une même charge, à mesure que le diamètre de l'orifice diminue, et devient égal à $0^m.71$, lorsque ce diamètre est d'un millimètre.

Les résultats qui précèdent conviennent également aux orifices circulaires, carrés et rectangulaires, horizontaux ou verticaux; il suffit que le moyen diamètre de l'orifice soit très-petit par rapport à la hauteur de la charge et au diamètre du vase.

L'expérience a encore fait reconnaître que le débit est indépendant de la figure de l'orifice, ou qu'il reste constant tant que l'aire de l'orifice ne change pas, pourvu toutefois que sa figure ne présente pas d'angle rentrant.

Enfin, MM. Poncelet et Lesbros ont reconnu que la largeur des orifices verticaux rectangulaires n'a aucune influence sur la valeur du coefficient $m$; cette valeur reste la même à charge et à hauteur d'orifices égales, quelle que soit la largeur de cet orifice.

219. Nous venons de voir que le rapport du diamètre de la section contractée est à peu près les $0^m.80$ du diamètre de l'orifice; nous savons de plus que la longueur de la veine contractée est d'environ la moitié du diamètre de l'orifice; lorsque cet orifice est circulaire, on peut donc prendre, ainsi que le fait Eytelwein, les nombres 10, 8 et 5 pour le diamètre de l'orifice, celui de la section contractée, et pour la longueur de la veine.

On augmente le débit d'un orifice en l'évasant ou en y adaptant un ajutage ayant la forme de la veine: par cette disposition, on annulle presque complétement l'influence de la contraction, et la vitesse, à la sortie d'un orifice évasé, est due à très-peu près à la hauteur de la charge.

Lorsque l'orifice est polygonal au lieu d'être circulaire, on observe, dans ce cas, un phénomène remarquable, connu sous le nom d'*inversion de la figure de la veine*, et qui, en général, consiste en ce que la fi-

gure de la section transversale de la veine, à mesure qu'on s'éloigne de l'orifice, se modifie de manière que les lignes diamétrales les plus longues, dans l'orifice, deviennent les plus courtes, en sorte que la veine présente des côtes saillantes dans les directions correspondantes au milieu des côtés de l'orifice et réciproquement.

220. Lorsque l'orifice correspond à un ajutage intérieur ou extérieur, le débit diminue ou augmente.

Ainsi, lorsqu'on fait pénétrer dans l'intérieur du vase un tuyau cylindrique dont l'extrémité intérieure sert d'orifice, et si l'on produit l'écoulement de manière que l'eau de la veine ne touche pas les parois du tuyau, on trouve alors que la valeur du coefficient $m$ est de $0^m.50$, ou que l'aire de la section contractée n'est que la moitié de l'aire de la section du tuyau.

Lorsque le tuyau est extérieur ou ne pénètre pas dans l'intérieur du vase, et que sa longueur est seulement égale à deux ou trois fois au plus son diamètre, si l'on produit l'écoulement de manière que l'eau touche les parois du tuyau ou sorte à pleine section, le débit est alors égal aux $0^m.82$ de celui qui aurait lieu s'il n'y avait ni tuyau, ni contraction; comme $(0.82)^2 = 0.67 = \frac{2}{3}$, il en résulte que, dans cette circonstance, la hauteur due à la vitesse est égale aux $\frac{2}{3}$ de la charge.

Nous savons que quand l'orifice est suivi d'un aju-

L'expérience a encore fait reconnaître e, l'eau sort
est indépendant de la figure de l'ori e forme cylin-
reste constant tant que l'aire de l'o apide et souvent
pas, pourvu toutefois que sa figur eau cristal.
d'angle rentrant. que, pour des orifices
Enfin, MM. Poncelet et Les et mince et dont le dia-
la largeur des orifices vertic rement à la hauteur de la
aucune influence sur la vale u vase, le coefficient $m$ ne
valeur reste la même à cha de $0^m.60$, et ne pourra at-
égales, quelle que soit la l'orifice sera extrêmement

219. Nous venons de
mètre de la section con un très-court pénétrant dans l'in-
du diamètre de l'orif ce coefficient pourra descendre jus-
longueur de la vein
tié du diamètre d
circulaire, on pe un ajutage extérieur cylindrique et très-
Eytelwein, les r ce coefficient sera de $0^m.82$, lorsque l'eau sor-
de l'orifice, ce pleine section;
longueur de l ajutage évasé suivant la forme de la
On augme ce coefficient sera égal à l'unité.
en y adapta Ainsi, $0^m.50$ et $1^m.00$ sont les limites du rapport
par cette d entre l'aire de la section contractée et celle de l'ori-
ment l'inf fice, ou des valeurs du cofficient $m$ par lequel il faut
sortie d'u multiplier l'aire de l'orifice pour avoir l'aire de la
hauteur section contractée, laquelle, étant multipliée par la
vitesse due à la charge, donne le débit.

Lorsq
laire, c 221. Dans les articles qui précèdent, nous avons
quable admis que le liquide arrivait également de toutes
la vei parts à l'orifice; mais, lorsque le plan de cet orifice
est vertical et que sa figure est rectangulaire, il peut

trouve dans le plan
r, alors la contraction
le débit sera plus con-
m aura une plus grande
était supprimée en même
sur les côtés, la valeur de *m*
davantage.

ds de l'orifice, sans être dans le
es parois du vase ou réservoir, en
t rapproché, la contraction sur ce côté
nt pas entièrement supprimée, le débit
ndre que dans le cas précédent, mais plus
que si la contraction était complète.

2. Nous allons maintenant faire voir que la
orie s'accorde avec les résultats que l'observation
ous a fournis; pour cela considérons un petit orifice
au centre duquel correspond une charge dont la
hauteur soit considérable par rapport au diamètre de
l'orifice, imaginons ensuite, autour du centre de
l'orifice, une surface sphérique qui représentera la
sphère d'activité de l'orifice dont nous supposerons
le rayon d'environ deux fois le diamètre de cet ori-
fice. Lorsque la surface sphérique rencontrera les
parois, elle se réduira à une portion d'elle-même,
qui sera, suivant les circonstances, plus grande ou
plus petite qu'une demi-sphère, et pourra même être
une portion irrégulière de la sphère, lorsque cette
surface rencontrera les parois latérales, circonstance
dont nous n'avons pas à nous occuper en ce moment,

tage évasé suivant la forme de la veine, l'eau sort sans contraction, et la veine affecte une forme cylindrique; elle est d'ailleurs pleine limpide et souvent semblable à un barreau du plus beau cristal.

L'observation apprend donc que, pour des orifices percés dans une paroi plane et mince et dont le diamètre est très-petit, relativement à la hauteur de la charge et au diamètre du vase, le coefficient $m$ ne descendra pas au-dessous de $0^m.60$, et ne pourra atteindre $0^m.71$ que lorsque l'orifice sera extrêmement petit;

Que, pour un tuyau très-court pénétrant dans l'intérieur du vase, ce coefficient pourra descendre jusqu'à $0^m.50$;

Que, pour un ajutage extérieur cylindrique et très-court, ce coefficient sera de $0^m.82$, lorsque l'eau sortira à pleine section;

Que, pour un ajutage évasé suivant la forme de la veine, ce coefficient sera égal à l'unité.

Ainsi, $0^m.50$ et $1^m.00$ sont les limites du rapport entre l'aire de la section contractée et celle de l'orifice, ou des valeurs du cofficient $m$ par lequel il faut multiplier l'aire de l'orifice pour avoir l'aire de la section contractée, laquelle, étant multipliée par la vitesse due à la charge, donne le débit.

221. Dans les articles qui précèdent, nous avons admis que le liquide arrivait également de toutes parts à l'orifice; mais, lorsque le plan de cet orifice est vertical et que sa figure est rectangulaire, il peut

arriver que son bord inférieur se trouve dans le plan du fond du vase ou du réservoir, alors la contraction sur le fond étant supprimée, le débit sera plus considérable ou le coefficient $m$ aura une plus grande valeur. Si la contraction était supprimée en même temps sur le fond et sur les côtés, la valeur de $m$ augmenterait encore davantage.

Si l'un des bords de l'orifice, sans être dans le plan de l'une des parois du vase ou réservoir, en était cependant rapproché, la contraction sur ce côté ne se trouvant pas entièrement supprimée, le débit serait moindre que dans le cas précédent, mais plus grand que si la contraction était complète.

222. Nous allons maintenant faire voir que la théorie s'accorde avec les résultats que l'observation nous a fournis; pour cela considérons un petit orifice au centre duquel correspond une charge dont la hauteur soit considérable par rapport au diamètre de l'orifice, imaginons ensuite, autour du centre de l'orifice, une surface sphérique qui représentera la sphère d'activité de l'orifice dont nous supposerons le rayon d'environ deux fois le diamètre de cet orifice. Lorsque la surface sphérique rencontrera les parois, elle se réduira à une portion d'elle-même, qui sera, suivant les circonstances, plus grande ou plus petite qu'une demi-sphère, et pourra même être une portion irrégulière de la sphère, lorsque cette surface rencontrera les parois latérales, circonstance dont nous n'avons pas à nous occuper en ce moment,

puisque nous avons supposé l'orifice très-petit par rapport aux sections du vase.

La portion de la surface sphérique, intérieure au vase ou au liquide, sera traversée à peu près normalement pas les filets fluides; plus elle aura d'étendue, plus les directions des filets seront obliques et même opposés, et par conséquent plus le mouvement du liquide au passage de l'orifice sera contrarié, plus l'effet de la contraction sera considérable.

Lorsque la paroi dans laquelle l'orifice est percé, sera plane, la calotte sphérique intérieure au vase sera celle d'une demi-sphère; si la paroi est concave vers l'intérieur du vase, alors la calotte sera moindre que celle d'une demi-sphère, et l'effet de la contraction en sera moins sensible; si au contraire la paroi est convexe, la surface de la calotte augmente ainsi que l'effet de la contraction, et cet effet serait le plus grand possible si la calotte pouvait devenir une sphère entière, alors il n'y aurait plus d'écoulement, et le centre de l'orifice serait dans le cas de tous les points d'une masse liquide en équilibre.

Lorsque l'orifice est très-petit on peut le transporter au milieu de la masse liquide en faisant pénétrer dans l'intérieur du vase un tube d'un faible diamètre. Supposons donc qu'on ait transporté un petit orifice au centre d'une masse liquide, contenue dans un vase, au moyen d'un tuyau d'une longueur au moins double de son diamètre; imaginons ensuite une sphère d'un rayon égal au diamètre du tuyau et

dont le centre se confonde avec celui de l'orifice, elle pourra représenter la sphère d'activité de cet orifice, et ses divers rayons seront les directions que tendent à suivre les filets fluides.

Si le diamètre de l'orifice se réduisait à un seul point, la sphère serait complète, les pressions qui s'exercent sur les différents points de sa surface, se détruiraient, et la masse liquide resterait en équilibre. La pression supprimée sur la partie de la sphère que remplace le tuyau, est donc la cause du mouvement, et lorsque ce mouvement est parvenu à l'uniformité, il doit y avoir équilibre entre la pression supprimée et la quantité de mouvement effective que le liquide possède dans le sens de l'axe de la veine.

Admettons actuellement que l'orifice conservant la même position et le même diamètre, le tuyau, dont nous supposerons l'axe vertical, s'élargisse par sa base inférieure et devienne conique divergent, alors la partie supprimée de la sphère prendra plus d'étendue, et les pressions exercées sur cette partie, ou plutôt les quantités de mouvement que ces pressions peuvent imprimer au liquide dans le sens de l'axe, doivent encore être égale à la quantité de mouvement effective que possède le liquide. Cette quantité de mouvement doit donc augmenter avec l'étendue de la portion supprimée de la sphère. Dans la circonstance que nous venons d'examiner, l'écoulement a lieu par un orifice ménagé au sommet d'un

cône rentrant intérieurement, mais sans que le liquide touche la paroi extérieure du cône.

Si l'angle des génératrices du cône continue d'augmenter et atteigne deux angles droits, la surface du cône deviendra un plan, et la partie supprimée de la sphère d'activité sera égale à sa moitié; c'est alors la quantité de mouvement dans le sens de l'axe, que les pressions exercées sur cette moitié peuvent imprimer au liquide, qui devra être égale à la quantité de mouvement effective que possède le liquide. Dans cette circonstance, l'écoulement a lieu par un orifice percé dans une paroi plane et mince.

L'angle des génératrices du cône, continuant encore à augmenter, la paroi du vase deviendra conique, saillante extérieurement; la portion supprimée de la sphère d'activité sera plus grande que sa moitié, et l'écoulement aura lieu par un orifice ménagé au sommet d'un cône saillant. Enfin si les génératrices deviennent parallèles, le vase se réduira à un cylindre sans fond, il n'y aura plus de sphère d'activité, ni de contraction, et l'écoulement aura lieu à pleine section dans un tuyau cylindrique vertical; comme on néglige les frottements, le débit dans ce cas devra être égal à la section du tuyau par la vitesse due à la hauteur de la charge sur le centre de l'orifice.

Ce qui précède doit faire concevoir pourquoi sous une même charge sur le centre du même orifice, le débit éprouve des variations qui dépendent de la forme de la paroi dans laquelle l'orifice est percé.

Nous allons maintenant chercher à apprécier ces variations.

223. Proposons-nous d'abord de déterminer le rapport $m$ entre l'aire de l'orifice et celle de la section contractée, lorsque l'orifice est transporté au centre de la masse liquide par un tube cylindrique; pour y parvenir rappelons-nous que le mouvement est dû aux pressions supprimées sur la partie de la sphère d'activité que remplace la section du tuyau; remarquons ensuite que l'orifice étant petit, et la charge considérable, la portion supprimée de la sphère n'ayant qu'une faible courbure, ne diffèrera pas sensiblement de l'aire de la section, et que l'on pourra considérer comme parallèles les pressions qui agissent sur les différents points de cette portion supprimée, il devra donc y avoir équilibre entre la somme de toutes ces pressions et la quantité de mouvement effective que possède le liquide; si donc, nous désignons :

Par A l'aire de la section du tube (fig. 26);

Par $\omega$ l'aire de la section contractée;

Par $h$ la hauteur du niveau du liquide, au-dessus du centre de l'orifice;

Par V la vitesse due à cette hauteur;

La somme des pressions qui agissent sur la portion supprimée, ou sur l'aire A, aura pour expression $\pi A h$.

Comme la vitesse V est celle dont est animée le liquide au passage de la section contractée, la quan-

tité de mouvement que possède ce liquide a pour expression $\frac{\pi\omega V^2}{g}$ et est égale à $2\pi\omega h$; on doit donc avoir $\pi A h = 2\pi\omega h$, d'où $\omega = \frac{A}{2} = mA$, et par conséquent $m = 0.50$, résultat confirmé par des expériences de Borda et de Bidone.

224. Proposons-nous encore de déterminer la valeur de $m$, lorsque l'orifice est percé dans une paroi plane et mince (fig. 27): si nous considérons un orifice rectangulaire et vertical, l'axe de la veine sera horizontal sur la petite longueur comprise entre cet orifice et la section contractée; tout étant symétrique par rapport à l'axe de la veine, la direction comme la vitesse des filets, cette veine formera un solide de révolution; appelons 2L la largeur de l'orifice, $2l$ celle de la section contractée;

$\alpha$ l'angle de l'un des filets avec l'axe de la veine;

$h$ la hauteur de la charge sur le centre de l'orifice, hauteur qui est très-considérable relativement à la largeur 2L de cet orifice;

V la vitesse due à cette hauteur $h$.

Pour plus de simplicité, supposons d'abord que l'orifice ait la forme d'un carré et que la contraction s'exerce seulement sur les deux côtés verticaux. Si nous considérons une partie de la veine comprise entre deux plans horizontaux passant près du centre et séparés par un intervalle $e$, d'après ce que nous avons vu, il y aura équilibre entre la quantité de mouvement effective que possède le liquide au passage de

la section contractée, et la quantité de mouvement que les pressions supprimées pourraient imprimer dans le sens de l'axe de la veine ; or, la quantité de mouvement effective que possède, sur la longueur $l$, la couche de liquide, comprise entre les deux plans horizontaux, à son passage par la section contractée, a évidemment pour expression $\frac{\pi}{g}leV^2 = 2\pi lhe$, car au passage de la section contractée, les vitesses qui correspondent aux différents points de cette section, suivent des directions parallèles et sont toutes égales à V.

Mais, si l'on imagine la surface cylindrique verticale et circulaire ayant pour axe la verticale passant par le centre de l'orifice, et pour diamètre la largeur 2L de l'orifice, on remarquera que les filets la traverseront normalement puisqu'ils sont convergents dans le sens horizontal; comme les pressions dues à la hauteur $h$ ne peuvent imprimer dans le sens de l'axe que des vitesses égales à $V\cos\alpha$, et que les filets, à leur rencontre avec la surface cylindrique, ont une section normale égale à $eLd\alpha$, il en résulte que la quantité de mouvement de l'un des filets sera égale à $\frac{\pi}{g}eLV^2\cos^2\alpha d\alpha$, et pour tous les filets de la couche sur la largeur L, elle sera égale à $2\pi eLh\int\cos^2\alpha d\alpha$; cette quantité de mouvement, que pourraient imprimer les pressions supprimées, devant être égale à la quantité de mouvement effective que possède la couche de liquide que nous considérons, il en résulte que l'on doit avoir $l = L\int\cos^2\alpha d\alpha$.

Pour trouver la valeur de $\int cos^2\alpha d\alpha$, désignons $sin\alpha$ par $x$, alors nous aurons $cos^2\alpha = 1 - x^2$ et $d\alpha = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, par conséquent

$$\int cos^2\alpha d\alpha = \int dx\sqrt{1-x^2} = \tfrac{1}{2}arc(sin = x) + \tfrac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + c = \frac{\alpha}{2} + \frac{sin2\alpha}{4} + c;$$

l'orifice étant percé dans une paroi plane et mince, on devra prendre l'intégrale depuis le filet dans la direction de l'axe pour lequel $\alpha = o$, ce qui donne $sin2\alpha = o$ et $c = o$, jusqu'au plan de l'orifice pour lequel $\alpha = 90° = \frac{\pi}{2}$ et $sin2\alpha = o$, on trouve ainsi $\int cos^2\alpha d\alpha = 0.785$.

Si la contraction s'exerce dans tous les sens, pour le plan horizontal passant par le centre on aura $\int cos^2\alpha d\alpha = 0.785$, pour le plan vertical passant par le centre on aura également $\int cos^2\alpha d\alpha = 0.785$; 0.785 est donc le rapport entre le diamètre de la section contractée et celui de l'orifice percé dans une paroi plane et mince. Michelotti fils, par de nombreuses expériences, a trouvé pour ce rapport 0.787, nombre qui ne présente qu'une différence insignifiante avec celui que la théorie vient de nous donner.

Si l'orifice au lieu d'être carré ou rectangulaire était circulaire, dans chaque plan diamétral on aurait encore 0.785, pour le rapport entre le diamètre de la section contractée et celui de l'orifice; il résulte de ce rapport que le diamètre de la section contractée est égal au $\frac{1}{8}$ de la circonférence de l'orifice.

Le rapport entre les diamètres étant de 0.785, celui entre l'aire de la section contractée et celle de l'orifice en sera le carré, il sera donc égal à 0.616 ; c'est ce nombre que l'on appelle coefficient de réduction ou de correction et que l'on désigne par $m$.

Si l'on désigne par A l'aire de l'orifice et par $\omega$ celle de la section contractée, on aura $\omega = m$A, et dans le cas où l'orifice est percé dans une paroi plane et mince, $\omega = 0.616$A.

225. Lorsque la paroi a la forme d'un cône tronqué saillant ou rentrant et que l'orifice se trouve à la petite base, en adoptant une marche analogue à celle suivie dans le numéro précédent, on peut déterminer la valeur du coefficient $m$ lorsque l'angle des génératrices du cône est plus grand ou plus petit que deux angles droits; voici pour les angles compris entre 45° et 150°, le rapport entre les diamètres des sections et la valeur de $m$ qui correspond à ce rapport.

| Angle des génératrices du cône avec l'axe de la veine. | Valeur de $\int cos^2 \alpha d\alpha$ ou rapport du diamètre de la section contractée à celui de l'orifice. | Valeur de $m$ ou du coefficient de réduction. |
|---|---|---|
| 45° | 0.642 | 0.412 |
| 60° | 0.739 | 0.546 |
| 75° | 0.777 | 0.604 |
| 90° | 0.785 | 0.616 |
| 105° | 0.788 | 0.621 |
| 120° | 0.830 | 0.689 |
| 135° | 0.927 | 0.859 |
| 150° | 1.091 | 1.190 |

Pour déterminer la valeur de $m$, il suffit de pouvoir prendre l'intégrale de $\int \cos^2\alpha d\alpha$ depuis $\alpha = o$, jusqu'à la valeur de $\alpha$ déterminée par la forme de la surface de la paroi dans laquelle l'orifice est percé.

226. Nous pouvons encore faire connaître plusieurs autres résultats qui nous paraissent dignes d'intérêt; désignons toujours par Q le débit constant de l'orifice dans l'unité de temps;

Par $u$ la vitesse moyennne au passage de l'orifice;

Par $h_{,}$ la hauteur due à cette vitesse;

Par V et par $h$ les quantités analogues relatives à la section contractée.

Le mouvement étant permanent, on aura nécessairement $Au = \omega V = Q$, et par suite $h_{,}A^2 = h\omega^2 = \frac{Q^2}{2g}$, et, à cause de $\omega = mA$, il vient $h_{,} = m^2 h$; par conséquent, que l'orifice soit percé dans une paroi plane ou courbe, dès l'instant que l'on a $\omega = mA$, il vient nécessairement $h_{,} = m^2 h$; lorsque la paroi est plane et mince, on a $m = \left(\frac{\Pi}{4}\right)^2 = 0.616$, il vient donc

$$h_{,} = \left(\frac{\Pi}{4}\right)^4 h = 0.379h.$$

La quantité de mouvement due à la vitesse moyenne, au passage de l'orifice, a pour expression $2\pi A h_{,} = \frac{\pi Q^2}{gA}$, et celle que possède réellement le liquide, au passage de la section contractée, a pour expression $2\pi\omega h = \frac{\pi Q^2}{g\omega}$; comme A est toujours plus

grand que $\omega$, il en résulte que la quantité de mouvement due à la vitesse moyenne, au passage de l'orifice, est toujours plus petite que la quantité de mouvement effective que possède le liquide au passage de la section contractée; la différence entre ces quantités de mouvement a pour expression $2\pi(\omega h - Ah_{,})$; comme $\omega = mA$ et que $h_{,} = m^2 h$, cette différence devient $2\pi Ah(m - m^2)$; sous cette forme, on reconnaît qu'elle sera nulle lorsque l'on aura $m = 1$, ou lorsqu'il n'y aura pas de contraction et qu'elle sera la plus grande possible, lorsqu'on aura $d(m - m^2) = 0$ ou $m = \frac{1}{2} = 0.50$; cette valeur de $m$ est donc la plus petite que puisse avoir le coefficient de réduction; lorsque $m$ a cette valeur, le liquide, au passage de l'orifice, ne possède que le quart de la quantité de mouvement qu'il aurait s'il n'y avait pas de contraction, et la moitié de celle qu'il possède réellement au passage de la section contractée.

S'il n'y avait pas de contraction, la quantité de mouvement, au passage de l'orifice, serait égale à $2\pi Ah$; mais, la quantité de mouvement due à la vitesse moyenne étant seulement égale à $2\pi Ah_{,}$, il en résulte que la réduction qu'éprouve cette quantité, par le fait de la contraction, a pour expression

$$2\pi A(h - h_{,}) = 2\pi Ah(1 - m^2);$$

lorsque cette perte ou réduction sera égale à la quantité de mouvement effective que possède le liquide au passage de la section contractée, on aura

$$Ah - Ah_{,} = \omega h,$$

et, en remplaçant $\omega$ et $h_{,}$ par leurs valeurs $m$A et $m^2h$, il viendra pour déterminer la valeur de $m$ qui convient, dans la circonstance admise, $1 = m + m^2$, d'où on tire $m = 0.616$, valeur qui est précisément celle qui convient aux orifices percés dans une paroi plane et mince. Ce résultat étant indépendant de la figure de l'orifice, nous devons en conclure que, quand un liquide s'écoule par un orifice de figure quelconque percé dans une paroi plane et mince, la quantité de mouvement due à la vitesse moyenne au passage de l'orifice, ajoutée à la quantité de mouvement effective que le liquide possède au passage de la section contractée, forme une somme précisément égale à la quantité de mouvement qu'il posséderait s'il n'y avait pas de contraction.

Si, au passage de l'orifice, la quantité de mouvement due à la vitesse moyenne est égale à la moitié de celle que le liquide posséderait s'il n'y avait pas de contraction, on aura $Ah_{,} = \frac{Ah}{2}$ ou $m^2 = \frac{1}{2}$, d'où

$$m = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.71.$$

S'il n'y avait pas de contraction, la quantité d'action totale que posséderait le liquide, au passage de l'orifice, serait égale à $\frac{\pi}{g}Au^3$, celle que possède réellement le liquide, au passage de la section contractée, est égale à $\frac{\pi}{g}\omega V^3$; la différence entre ces quantités a

donc pour expression $\frac{\pi}{g}(\omega V^3 - Au^3) = \frac{\pi}{g}AV^3(m - m^3)$; cette différence sera la plus petite possible lorsque l'on aura $m = 1$, elle sera, au contraire, la plus grande possible lorsque l'on aura $1 - 3m^2 = o$, ou $m = 0.578$.

Lorsque la quantité d'action que possède le liquide au passage de la section contractée, ajoutée à la quantité d'action due à la vitesse moyenne au passage de l'orifice, forme une somme précisément égale à la quantité d'action que le liquide posséderait s'il n'y avait pas de contraction, on a $AV^3 = \omega V^3 + Au^3$ ou $1 = m + m^3$, ce qui donne $m = 0.685$.

Si la quantité d'action due à la vitesse moyenne, au passage de l'orifice, est précisément égale à la moitié de celle que possède réellement le liquide au passage de la section contractée, on a $Au^3 = \frac{\omega V^3}{2}$ ou $m^3 = \frac{m}{2}$, d'où $m = 0.71$.

Si la quantité d'action due à la vitesse moyenne, au passage de l'orifice, est égale à la moitié de celle que posséderait le liquide s'il n'y avait pas de contraction, on a $Au^3 = \frac{AV^3}{2}$ ou $m^3 = \frac{1}{2}$, d'où $m = 0.795$.

Enfin, si la quantité d'action que possède le liquide, au passage de la section contractée, est égale à la moitié de celle qu'il posséderait s'il n'y avait pas de contraction, on a $\omega V^3 = \frac{AV^3}{2}$, d'où $m = 0.50$.

227. Il existe deux circonstances dans lesquelles

on peut obtenir immédiatement la valeur du coefficient de réduction $m$; l'une a lieu lorsque l'orifice percé dans une paroi plane et mince, est très-petit par rapport à la section du vase, l'autre, quand l'orifice est suivi d'un ajutage cylindrique dont l'axe est perpendiculaire au plan de cet orifice, et dont la longueur est au plus égale à deux ou trois fois le diamètre de sa section.

Occupons-nous d'abord de la première de ces circonstances; pour cela, considérons un vase ABCD (fig. 28), dont l'axe soit vertical et dont le fond soit percé d'un orifice horizontal HL, très-petit par rapport à la section inférieure CD du vase.

Supposons que le niveau du liquide dans le vase soit maintenu constant, ou que le mouvement soit permanent.

Appelons M la masse constante du liquide que l'orifice débite dans l'unité de temps;

$v_0$ la vitesse qui correspond à la section AB, dont la surface est $o$;

$v_1$ la vitesse qui correspond à la section CD, dont $o'$ sera la surface;

$u$ la vitesse qui correspond à la section HL de l'orifice dont la section est A;

H la hauteur GI qui sépare les sections $o$ et $o'$.

Le mouvement étant permanent, les sections du vase variant par degrés insensibles entre les sections $o$ et $o'$, et la résistance due au frottement contre les parois pouvant être négligée, la quantité d'action

que le liquide possède au passage de la section $o'$ doit être égale à celle qu'il possédait dans la section $o$, augmentée de celle imprimée par la pesanteur sur la hauteur H, c'est-à-dire que l'on doit avoir :

$$\frac{Mv_{,}^2}{2} = \frac{Mv_o^2}{2} + MgH \text{ ou } \frac{v_{,}^2}{2} = \frac{v_o^2}{2} + gH.$$

Entre les sections $o'$ et A, qui sont aussi proches que faire se peut puisqu'elles correspondent à un même plan, la pesanteur n'imprime aucune quantité d'action, et la différence entre celles que le liquide possède lorsqu'il arrive à la première section et qu'il sort de la seconde, est uniquement due à la variation de la vitessé, c'est-à-dire que l'on doit avoir

$$\frac{Mv_{,}^2}{2} - \frac{Mu^2}{2} = M\frac{(u-v_{,})^2}{2} \text{ ou } \frac{v_{,}^2}{2} = \frac{u^2}{2} + \frac{(u-v_{,})^2}{2},$$

et par conséquent $2gH = u^2 - v_o^2 + (u - v_{,})^2$; mais à cause de la permanence du mouvement, on a

$$ov_o = o'v_{,} = Au, \text{ d'où } v_o = \frac{A}{o}u,\ v_{,} = \frac{A}{o'}u$$

$$\text{et } u - v_{,} = u\left(1 - \frac{A}{o'}\right),$$

et par suite $2gH = u^2\left(1 - \frac{A^2}{o^2} + \left[1 - \frac{A}{o'}\right]^2\right)$, la section A étant très-petite par rapport aux sections $o$ et $o'$, les quantités $\frac{A}{o}$ et $\frac{A}{o'}$ peuvent être négligées sans qu'il puisse en résulter d'erreur, il reste donc $2u^2 = 2gH$ ou $u = 0.71\sqrt{2gH}$, c'est-à-dire que la hauteur due à la vitesse moyenne, au passage de l'o-

rifice, est précisément égale à la moitié de la hauteur H. $\sqrt{2gH}$ étant la vitesse V due à la hauteur H, on a donc $u = 0.71V$; mais $\omega$ étant l'aire de la section contractée EF, comme dans cette section, la vitesse est celle due à la hauteur H, on a nécessairement $Au = \omega V = 0.71AV$, d'où $\omega = 0.71A = mA$, et, par conséquent, $m = 0.71$, valeur numérique qu'il s'agissait de déterminer.

Occupons-nous actuellement de déterminer la valeur numérique du coefficient $m$, lorsque l'orifice est suivi d'un ajutage; pour cela, considérons un orifice circulaire et vertical AB (fig. 29), à la suite duquel soit un ajutage cylindrique dont l'axe soit horizontal et dont la longueur soit au moins égale à deux fois le diamètre de l'orifice, sans dépasser le triple de ce diamètre, afin de pouvoir négliger la résistance due au frottement du liquide contre les parois de cet ajutage.

Désignons toujours par A l'aire de l'orifice AB ou de la section EF de l'ajutage;

Par $\omega$ l'aire de la section contractée CD;

Par M la masse de liquide que l'ajutage débite dans l'unité de temps;

Par H la hauteur GI du niveau de l'eau au-dessus du centre de l'orifice;

Par P la pression atmosphérique par unité de surface;

Par $p$ la pression par unité de surface qui agit sur la section contractée;

Par $u$ la vitesse moyenne qui correspond à l'orifice et à la sortie de l'ajutage lorsque l'eau coule à pleine section;

Par $v$ la vitesse qui correspond à la section contractée.

Considérons les sections CD et EF et remarquons que la différence entre les quantités d'action que le liquide possède au passage de ces sections, ne peut provenir que de la différence des pressions $P-p$, et de la différence des vitesses $v-u$, puisque l'axe de l'ajutage est horizontal; on doit donc avoir

$$\frac{Mv^2}{2}-\frac{Mu^2}{2}=\frac{Mg}{2}\left(\frac{P-p}{\pi}\right)+\frac{M(v-u)^2}{2},$$

ou

$$\frac{v^2}{2g}-\frac{u^2}{2g}=\frac{P-p}{\pi}+\frac{(v-u)^2}{2g},$$

d'un autre côté la vitesse $v$, qui correspond à la section contractée, étant due à la hauteur H et à la différence des pressions $P-p$, on a encore $\frac{v^2}{2g}=H+\frac{P-p}{\pi}$, par conséquent $\frac{u^2}{2g}+\frac{(v-u)^2}{2g}=H$; mais $m$ étant le coefficient de réduction qui ne varie pas avec la pression, on a toujours $\omega=mA$, et comme la permanence du mouvement donne encore $Au=\omega v$, il en résulte $v=\frac{u}{m}$, ou $v-u=u\left(\frac{1}{m}-1\right)$, et par suite

$$2gH=u^2\left(1+\left(\frac{1}{m}-1\right)^2\right),\text{ d'où } u=\sqrt{\frac{2gH}{1+\left(\frac{1}{m}-1\right)^2}}.$$

Lorsque l'orifice est percé dans une paroi plane on

a $m = 0.616$, et par suite

$$1 + \left(\frac{1}{m} - 1\right)^2 = 1 + m^2 = m(1 + 2m) = 1.365,$$

comme $\sqrt{\frac{1}{1.365}} = \sqrt{0.73} = 0.85$, il en résulte que $u = 0.85\sqrt{2gH}$, l'observation donne $u = 0.82\sqrt{2gH}$, la faible différence entre les deux résultats peut être attribuée à l'influence du frottement entre les parois et à la perte de force vive qui en est la conséquence; en effet nous avons vu dans le numéro précédent, que quand la différence entre la quantité d'action que possède le fluide au passage de la section contractée, et à celui de l'orifice, était la plus grande possible, on avait $m = 0.578$; si nous adoptons cette valeur nous trouverons $u = 0.81\sqrt{2gH}$, résultat qui ne diffère plus de celui fourni par l'observation.

Comme $(0.82)^2 = 0.67 = \frac{2}{3}$, la relation précédente fait voir que la hauteur due à la vitesse du liquide, à sa sortie d'un court ajutage cylindrique, est égale aux $\frac{2}{3}$ de la charge sur le centre de l'orifice.

Si l'ajutage suivait un orifice évasé, on aurait $m = 1$, et par suite $u = \sqrt{2gH}$, comme cela doit être.

Si l'ajutage, au lieu de suivre l'orifice, le précédait en pénétrant dans le vase ou réservoir, on aurait $m = 0.50$, et par suite $1 + \left(\frac{1}{m} - 1\right)^2 = 2$, d'où

$$u = 0.71\sqrt{2gH} = \sqrt{gH};$$

par conséquent, la hauteur due à la vitesse du liquide

qui sort à pleine section d'un tuyau très-court pénétrant dans l'intérieur d'un réservoir est seulement égale à la moitié de la charge sur le centre de l'orifice.

228. Dans ce qui précède, nous avons admis que le diamètre de l'orifice était très-petit, relativement à la hauteur de la charge, et nous savons que, dans cette circonstance, le coefficient reste constant avec la forme de la paroi ; supposons actuellement que le rapport entre la hauteur de la charge et le diamètre de l'orifice cesse d'être très-grand, et cherchons à reconnaître si le coefficient de réduction doit varier avec la grandeur de ce rapport.

Considérons un orifice horizontal et circulaire percé dans une paroi plane et mince, et supposons que la hauteur de la charge sur son centre, soit peu considérable et soit d'ailleurs susceptible de varier. Nous savons que la valeur des coefficients de réduction dépend principalement de la portion supprimée de la sphère d'activité du centre de l'orifice ; lors donc que le rayon de cette sphère, qui paraît être dans un rapport déterminé avec le diamètre de l'orifice, est très-petit relativement à la charge, il n'y a pas de différences sensibles entre les pressions exercées sur les différents points de la sphère, le coefficient $m$ doit rester constant, c'est aussi ce que confirme l'expérience ; mais si la charge diminue et devient seulement égale à cinq ou six fois le diamètre de l'orifice, alors la pression sur les différents points

de la sphère ne pourra plus être considérée comme constante, elle sera plus faible pour les parties supérieures; or, ces parties supportant une pression moindre éprouveront une moindre contraction, et le coefficient $m$ aura une valeur plus grande que si la charge était considérable; c'est encore ce que confirme l'expérience, car dans des circonstances analogues à celles dont nous venons de parler, l'expérience prouve que le coefficient $m$ qui est égal à $0^m$ 618 lorsque la hauteur de la charge est de 10 fois le diamètre, devient égal à $0^m.642$ lorsque la hauteur de la charge est seulement égale au diamètre.

Si l'orifice étant toujours horizontal, devient rectangulaire de circulaire qu'il était d'abord, dans cette circonstance comme dans la précédente, le centre des pressions se confondant toujours avec le centre de la figure de l'orifice, le coefficient $m$ éprouvera des modifications analogues.

229. Considérons encore un orifice circulaire horizontal percé dans une paroi plane et mince sur lequel la hauteur de la charge soit égale à la moitié du diamètre, ou soit plus petite que cette quantité, et cherchons quelle doit être, dans ces circonstances, la valeur du coefficient de correction.

Remarquons d'abord que quand la hauteur de la charge est aussi faible, l'adhérence et le frottement contre les parois diminuent les effets de la pression sur les couches voisines de ces parois et par suite les effets de la contraction ; cependant comme ce frotte-

ment est toujours assez faible, nous le négligerons. Si nous négligeons l'effet du frottement et que la hauteur de la charge soit précisément égale à la moitié du diamètre, il est évident que le coefficient de correction, pour chaque diamètre, sera peu différent de $0^m.785$, et, pour la section, de $0^m.616$ ou un peu plus grand que cette quantité.

Mais si la hauteur de la charge est moindre que la moitié du diamètre, une partie du liquide s'écoulera sans éprouver de contraction, et la valeur du coefficient $m$ augmentera; si, par exemple, au-dessus de l'orifice horizontal AB (fig. 31) se trouve une couche de liquide maintenue à un niveau constant, dont l'épaisseur CD soit moindre que la moitié de AB; si l'on prend AE=BF=CD, et si par les points E et F on élève les verticales GE et HF, il est évident que les filets du liquide compris entre ces verticales n'auront aucune tendance à converger vers le centre, et la contraction n'aura d'effet que dans les parties AE et FB qui seront l'une et l'autre réduites à 0.785CD.

Désignons par L le diamètre de l'orifice, par $h$ la hauteur CD de la charge, par $l$ le diamètre contracté, on aura $l=EF+0.785(AE+FB)$; mais $EF=L-2h$, d'où $l=L-2h(1-0.785)=L-0.43h$; lorsque $h$ sera égal à $\frac{L}{2}$ ou plus grand que cette quantité, on retrouvera $l=0.785L$; lorsque $h$ sera moindre que $\frac{L}{2}$, la valeur de $l$ augmentera et par suite celle du

de la sphère ne pourra plus être considér
constante, elle sera plus faible pour les r
rieures; or, ces parties supportant
moindre éprouveront une moindre co
coefficient *m* aura une valeur plus f
charge était considérable; c'est er
firme l'expérience, car dans des
logues à celles dont nous venor
rience prouve que le coefficie
0m 618 lorsque la hauteur de l
le diamètre, devient égal à (
teur de la charge est seulem

| | on m. |
|---|---|
| | 0.616 |
| | 0.651 |
| | 0.685 |
| | 0.758 |
| L | 0.835 |
| 57L | 0.916 |

Si l'orifice étant toujou
tangulaire de circulaire qu
circonstance comme dar
des pressions se confonda
la figure de l'orifice, l
modifications analogue

petites que 0.10L l'effet
blement nul et celui de
faire sentir.
horizontal, était vertical,
due à la vitesse sera égale

229. Considérons
rizontal percé dans
lequel la hauteur d
du diamètre, ou s
et cherchons quel
la valeur du coef

ur de la section, le liquide
au bord supérieur de l'ori-
ne contrarie le mouvement
de la section restera constam-
teur due à la vitesse; comme
eu lorsque l'écoulement a lieu

Remarquons
charge est aus
contre les paro
les couches
effets de la c

circonstance, si la contrac-
sur les côtés, la hauteur de la
is la surface jusqu'au seuil, la
d réduira la hauteur effective
e la contraction sur les côtés
une réduction exprimée par

$L - 0.43\frac{h'}{2}$; la section effective $Lh'$ devra donc être remplacée par $0.785Lh' - 0.169h'^2$.

S'il n'y avait pas de contraction sur le fond, comme cela a lieu au passage des ponts et des pertuis, la section effective devrait être remplacée par

$$Lh' - 0.43h'h_{,}.$$

Lorsqu'il sera question des déversoirs, nous aurons occasion de revenir sur le même sujet.

230. Considérons actuellement un orifice vertical et rectangulaire; alors le centre des pressions ne se confondra plus avec le centre de figure de l'orifice, le premier de ces centres sera inférieur à l'autre; mais la hauteur du centre des pressions, pour une même charge, restera constante avec celle de l'orifice, quelle que soit d'ailleurs la largeur de cet orifice; c'est-à-dire que si la charge est considérable, le coefficient de contraction dans le sens de la largeur restera constant et égal à $0^m.785$, tandis que dans le sens de la hauteur, il dépendra du rapport de la hauteur de l'orifice à celle de la charge; on doit donc prévoir que le coefficient $m$ doit rester constant, sous une même charge, pour tous les orifices de même hauteur.

Si le plan de l'orifice restant vertical, la hauteur de la charge diminue et reste cependant plus grande que la moitié de la hauteur de l'orifice, alors le centre des pressions différera d'autant plus du centre de figure que la hauteur de la charge sera plus petite, la partie supérieure de la veine sera moins contractée

que sa partie inférieure, et le coefficient $m$ sera un peu plus grand que si la charge était considérable par rapport à la hauteur de l'orifice.

Pour faire apprécier l'effet des variations de la charge ou de la hauteur due à la vitesse dans un orifice vertical, nous déterminerons cette hauteur pour un orifice rectangulaire et pour un orifice circulaire.

Soient $z_1$ la hauteur du niveau de l'eau au-dessus du seuil ou de la base inférieure de l'orifice.

$z_0$ la hauteur du même niveau au-dessus du bord supérieur de l'orifice;

$l$ la largeur constante de cet orifice que nous supposerons évasé;

L'aire de l'orifice sera exprimée par $l(z_1 - z_0)$; si nous supposons cette aire divisée en bandes horizontales, d'une hauteur égale à $dz$, chacune de ces bandes aura une surface égale à $ldz$, et pour celle qui se trouve à la profondeur $z$ au-dessous du niveau de l'eau, la vitesse qui lui correspond sera égale à $\sqrt{2gz}$; le volume d'eau qui, dans l'unité de temps, passe par cette bande est égal à $\sqrt{2gz} \times ldz = l\sqrt{2g}z^{\frac{1}{2}}dz$, l'intégrale de cette quantité prise depuis $z = z_0$, jusqu'à $z = z_1$ donnera le débit total qui a lieu par l'orifice dans l'unité de temps; on aura donc

$$Q = l\sqrt{2g}\int_{z_0}^{z_1} z^{\frac{1}{2}}dz = \tfrac{2}{3}l\sqrt{2g}(z_1^{\frac{3}{2}} - z_0^{\frac{3}{2}}),$$

la vitesse moyenne sera $u = \frac{Q}{\omega} = \frac{2}{3}\sqrt{2g}\left(\frac{z_1^{\frac{3}{2}} - z_0^{\frac{3}{2}}}{z_1 - z_0}\right)$, la

hauteur due à cette vitesse sera

$$h=\frac{u^2}{2g}=\frac{4}{9}\left(\frac{z_1^{\frac{3}{2}}-z_0^{\frac{3}{2}}}{z_1-z_0}\right)^2=\frac{4}{9}\left(\sqrt{z_1}+\sqrt{z_0}-\frac{\sqrt{z_1z_0}}{\sqrt{z_1}+\sqrt{z_0}}\right)^2,$$

si nous faisons $\sqrt{z_0}=n\sqrt{z_1}$, nous aurons

$$h=\frac{4}{9}z_1\left(\frac{1+n+n^2}{1+n}\right)^2,$$

comme $1+n+n^2$ sera toujours plus grand que $1+n$, il faut en conclure que la limite des valeurs de $h$ est $\frac{4}{9}z_1$ ou que $h$ sera toujours plus grand que cette quantité.

Supposons actuellement que l'orifice ait la forme d'un cercle dont le rayon soit R, et considérons un filet du liquide pris à une distance $r$ du centre, la section de ce filets sera exprimée par $rd\alpha dr$, $\alpha$ étant l'angle que fait avec la verticale, le rayon $r$ qui correspond à ce filet. Si nous désignons par $c$ la hauteur du niveau de l'eau au-dessus du centre du cercle, la hauteur due à la vitesse de ce filet sera égale à $c-r\cos\alpha$, le débit du filet aura donc pour expression

$$rdrd\alpha\sqrt{2g(c-r\cos\alpha)},$$

et le débit par l'orifice entier sera

$$Q=2\sqrt{2cg}\int d\alpha\int rdr\left(1-\frac{r\cos\alpha}{c}\right)^{\frac{1}{2}},$$

développant en série nous aurons

$$\left(1-\frac{r\cos\alpha}{c}\right)^{\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}\frac{r}{c}\cos\alpha+\frac{1}{8}\frac{r^2}{c^2}\cos^2\alpha-\text{etc.},$$

effectuant l'intégration par rapport à la variable $r$,

que sa partie inf[illegible] $\ldots + \frac{1}{2.4} \times \frac{R^4}{c^4} \cos^2\alpha - \text{etc.})$,
peu plus grand [illegible]
par rapport à la [illegible] par rapport à $\alpha$ en se rappelant que

Pour faire [illegible] $\sin^2\alpha = \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\alpha$, etc., et re-
charge ou de [illegible]
fice vertical [illegible] intégrale devant être prise depuis
un orifice [illegible] $\alpha = \Pi$, on a $\sin\alpha = o$, $\sin 2\alpha = o$, et que

Soient [illegible] se réduit à $\frac{\Pi}{2}$, il vient pour l'expression du
du seuil [illegible]
$z_0$ la [illegible] $Q = \Pi R^2 \sqrt{2gc}(1 + \frac{1}{2.4} \times \frac{R^2}{c^2} + \text{etc.})$; la vitesse
supér[illegible]
$l$ [illegible] moyenne est donc égale à $\sqrt{2gc}(1 + \frac{1}{2.4} \times \frac{R^2}{c^2} + \text{etc.})$,
pos[illegible] et la hauteur due à cette vitesse est

n[illegible]
t[illegible]

$$h = c(1 + \frac{1}{2.4} \times \frac{R^2}{c^2} + \text{etc.})^2,$$

par conséquent cette hauteur sera toujours plus grande que $c$.

Il ne devient nécessaire de faire usage de cette formule qu'autant que le sommet de l'orifice est très-près de la surface supérieure du liquide; quand la hauteur du niveau du liquide au-dessus du centre de l'orifice surpasse la hauteur de l'orifice, on peut considérer la vitesse moyenne comme étant due à la hauteur $c$, sans qu'il puisse en résulter d'erreur sensible.

231. Nous allons faire une application de ce qui précède au débit de ce que l'on appelle le *pouce de fontainier*.

ciens fontainiers avaient adopté pour unité ıre des eaux courantes, ce qu'ils appelaient le *d'eau;* c'était le débit, en un temps donné, d'un ce circulaire percé dans une paroi plane et mince; niveau de l'eau étant constamment maintenu à une ligne au-dessus du sommet de l'orifice, on admettait que ce débit était de $19^{m}.1953$ en vingt-quatre heures, ou de $0^{m}.000222$ en une seconde, c'est ce volume que l'on appelait le *pouce de fontainier.* On nommait par analogie *ligne d'eau* la 144e partie du *pouce d'eau,* et *point d'eau* la 144e partie de la *ligne d'eau.*

Pour faire un jaugeage, on formait une retenue au moyen d'un barrage, puis sur une même ligne horizontale on perçait dans une planche du barrage un certain nombre de trous d'un pouce de diamètre, que l'on fermait d'abord par des tampons; au moment de jauger on débouchait les trous en nombre suffisant pour que le niveau de l'eau se maintînt à une ligne au-dessus du sommet des trous; lorsque ce niveau restait constant, on estimait le produit du courant par le nombre des ouvertures qui livraient passage à l'eau.

Si l'on applique au pouce de fontainier les calculs de l'article précédent et que l'on adopte $0^{m}.616$ pour coefficient de correction, on aura

$$c = 7^{l}.00 = 15^{ml}.79, \quad R = 6^{l}.00 = 13^{ml}.55,$$

$$h = c\left(1 + \tfrac{1}{1.2} \times \frac{R^2}{c^2} + \text{etc.}\right) = 16^{ml}.58,$$

et par suite $v=\sqrt{2gh}=570^{ml}.30$, $m\pi R^2=353.83$, $Q=\omega v=201789^{m}.25$, ou $0^{ml}.0002018$ en une seconde et en vingt-quatre heures $17^{m}.45$ ; ce nombre est plus faible que celui généralement admis dans la pratique, cependant il s'accorde à $\frac{1}{15}$ près avec une expérience de Bossut ; ce savant ayant déterminé la valeur exacte du pouce fontainiér, par une expérience faite avec soin, a trouvé que cette valeur était de $17^{m}.938$ ; le débit dont on fait usage dans la pratique est probablement un résultat moyen des débits obtenus dans des circonstances non identiques, le liquide coulait à pleine section de certains orifices, d'autres étaient peut-être évasés, etc.

232. Il arrive très-souvent que l'eau à la sortie d'un orifice pratiqué dans une paroi de réservoir, est prise et conduite par un canal découvert appelé *coursier*, dont le fond ainsi que les parois latérales se raccordent avec le bord inférieur et les bords latéraux de l'orifice qui sont ainsi dans le plan du fond et des parois.

Les expériences de Bossut et celles de MM. Poncelet et Lesbros tendent à prouver que la présence d'un coursier est sans influence sensible sur le débit lorsque la hauteur de l'eau sur le centre des orifices est considérable ou au moins égale à trois fois le diamètre de l'orifice ; mais quand les charges sont très-faibles, la résistance des parois du coursier exerce une influence sensible sur le débit qui est parfois notablement réduit ; il faut alors avoir égard à cette

'sspositions qu'on veut prendre.
.'effet des grandes et des pe-
circonstance que nous venons
provenir de ce qu'avec les pre-
e étant comme lancé dans l'air, l'é-
st pas influencé par la résistance due
nt, puisque le liquide ne touche réel-
es parois qu'à une certaine distance de
e.

33. Lorsque l'eau coule par une ouverture, la urface du liquide peut être de beaucoup au-dessus du bord supérieur de l'ouverture qui, dans ce cas, prend le nom d'orifice; mais si la surface du liquide est au-dessous du bord supérieur de l'ouverture, ce bord est comme s'il n'existait pas, l'ouverture qui alors peut ne plus être limitée à sa partie supérieure, prend le nom de *pertuis* ou de *déversoir*, suivant que son bord inférieur est au niveau du fond du réservoir, ou est plus élevé que ce fond.

L'écoulement par les déversoirs n'est donc qu'un cas particulier de l'écoulement par des orifices verticaux, celui où la hauteur de l'eau sur le bord supérieur est nulle, et où la surface du liquide en amont affecte une pente très prononcée.

Pour déterminer le débit de l'écoulement par les déversoirs, plusieurs hydrauliciens ont adopté la formule suivante $Q = KLH\sqrt{2gH}$, dans laquelle K est un coefficient déterminé par de nombreuses expériences, L la largeur du déversoir et H la hauteur du

niveau de l'eau au-dessus du seuil du déversoir, que l'on appelle la charge sur le seuil.

On a d'ailleurs reconnu que la valeur de K varie, non-seulement avec la charge, mais encore avec la largeur relative, ou avec le rapport de la largeur du déversoir à celle du canal ou du réservoir ; cependant quant le déversoir a une largeur moindre que le cinquième de celle du canal, M. d'Aubuisson pense que l'on peut prendre $K = 0.400$, et qu'alors les débits, dans les cas ordinaires de pratique, sont représentés avec une exactitude suffisante par la formule $Q = 0.400LH\sqrt{2gH}$.

Lorsque la largeur du déversoir est égale à celle du canal, le même hydraulicien pense que dans cette circonstance, les résultats de l'expérience sont assez exactement représentés en prenant $K = 0.443$ ou par la formule $Q = 0.443LH\sqrt{2gH}$. Toutefois M. d'Aubuisson fait observer que cette formule ne doit être employée que quand la charge sur le seuil n'excède pas le tiers de la hauteur du déversoir au-dessus du fond du canal.

Enfin lorsque l'eau d'aval s'élève au-dessus du seuil du barrage, on dit que le déversoir est incomplet, et on le considère comme composé de deux parties, l'une supérieure aux eaux d'aval formant déversoir ordinaire, l'autre inférieure formant un orifice avec charge sur le sommet. Mais ces différentes manières de considérer les choses et d'évaluer le débit sont plus ou moins empiriques, et les coeffi-

cients dont on fait usage ne semblent pas mériter toute confiance, car ils résultent d'expériences insuffisantes, ou faites avec de faibles volumes d'eau passant sur des déversoirs de trop petites dimensions. Il est donc à regretter que des expériences spéciales sur de grands déversoirs n'aient pas été faites avec la précision nécessaire à ce genre d'observation; après avoir exprimé ce regret il nous reste à faire connaître les résultats de nos recherches sur cet objet important.

234. Nous avons trouvé dans le n° 181 que le débit, par les barrages ou déversoirs, avait pour expression en toute circonstance

$$Q = 0.385L(h^\circ + h_3)\sqrt{2g(h^\circ + h_3)} \ldots\ldots (1);$$

dans cette expression $h^\circ$ est la hauteur du niveau de l'eau, au-dessus du seuil du barrage de la section d'amont qui précède le déversement, hauteur que l'on appelle improprement la charge, et que dans le numéro précédent nous avons désigné par H; $h_3$ est la hauteur due à la vitesse dans la même section, hauteur qui peut être très-petite, mais qui ne doit être considérée comme nulle qu'autant qu'il s'agit d'un grand réservoir traversé par un faible volume d'eau.

Lorsque l'on croit pouvoir faire usage de la formule empirique $Q = KLh^\circ\sqrt{2gh^\circ} \ldots (2)$, il est facile de reconnaître que le coefficient K doit toujours être plus grand que $0^m.385$; en effet on peut représenter

$h_2$ par $\alpha h^\circ$, alors la formule (1) devient

$$Q = 0.385(1+\alpha)^{\frac{3}{2}} L h^\circ \sqrt{2gh^\circ},$$

et son rapprochement de la formule (2) donne

$$K = 0.385(1+\alpha)^{\frac{3}{2}},$$

quantité nécessairement plus grande que $0^m.385$; si par exemple $\alpha = 0.08$, on trouve $K = 0.432$.

Si le déversoir est évasé, la formule (1) donnera le débit avec exactitude, mais lorsque le déversoir n'est pas évasé, la contraction sur le fond et sur les côtés diminuant la section, on est obligé de corriger la formule (1) par un coefficient dont nous allons chercher à déterminer la valeur.

235. Sméaton, Dubuat et Bidone ont reconnu, par diverses observations, qu'en désignant par $m$ le coefficient de correction ou le rapport entre la dépense effective et celle qui aurait lieu si le déversoir était évasé, la valeur de ce rapport augmente plus rapidement que celle du rapport $\frac{h^\circ}{L}$. Il résulte encore de diverses expériences que l'on peut prendre $m = 0.65$, si la largeur du déversoir ne surpasse pas la hauteur de la charge sur le seuil; la valeur de $m$ augmente ensuite quand la largeur devient plus grande; elle atteint le chiffre de 0.75 lorsque la largeur est égale à cinq fois environ la hauteur de la charge sur le seuil, et celui de $0^m.80$ lorsque la largeur est égale à dix fois la même hauteur.

Il convient d'ailleurs de faire voir que ces valeurs

de $m$ s'accordent avec la théorie exposée dans le n° 204 ; en effet, un déversoir dont la largeur est plus grande que la hauteur de la section du liquide qui passe sur son seuil, éprouve dans le sens de cette largeur une réduction exprimée par $L - 0.43h_{,}$, L étant la largeur effective du déversoir, et $h_{,}$ la hauteur due à la vitesse de la section qui correspond au seuil, appelons $h'$ la hauteur de cette section, et H la hauteur totale de la charge sur le seuil que nous savons égale à $h^{\circ} + h_3$, on aura $h' = \frac{2}{3}H$, $h_{,} = \frac{4}{3}H$ et $l = L - 0.43h_{,} = L - 0.143H$. La contraction dans le sens vertical réduira la hauteur $h'$ à $0.785h'$, la section effective $Lh'$ devra donc être remplacée par

$$0.785h'(L - 0.143H);$$

Lorsque $H = L$, on trouve que la section contractée est égale à $0.673h'L$, ce qui donne $m = 0.673$, tandis que l'expérience a donné $m = 0.65$.

Lorsque $H = \frac{L}{5} = 0.20L$, on trouve que la section contractée est égale à $0.762Lh'$, ce qui donne $m = 0.762$, tandis que l'expérience a donné $m = 0.75$.

Enfin lorsque $H = 0.10L$, on trouve que la section contractée est égale à $0.774Lh$, ce qui donne $m = 0.774$, tandis que l'expérience a donné

$$m = 0.80.$$

Les formules dont il faut faire usage pour calculer le débit de l'eau qui passe sur un déversoir, sont donc les suivantes :

1° Lorsque la hauteur de la charge est égale à la largeur du déversoir,

$$Q = 0.673Lh'\sqrt{gh'} = 0.673 \times 0.385LH\sqrt{2gH} = 0.259LH\sqrt{2gH};$$

2° Lorsque la hauteur de la charge est égale au cinquième de la largeur du déversoir,

$$Q = 0.762Lh'\sqrt{gh'} = 0.293LH\sqrt{2gH};$$

3° Lorsque la hauteur de la charge est égale au dixième de la largeur du déversoir,

$$Q = 0.774Lh'\sqrt{gh'} = 0.298LH\sqrt{2gH}.$$

236. Lorsqu'un déversoir est établi transversalement à un canal, il prend alors le nom de barrage; la longueur du barrage pouvant être égale à la largeur du canal, ou peu différente de cette largeur, la contraction sur les côtés est alors nulle ou très-faible, aussi remarque-t-on que le débit est le plus considérable lorsque la longueur du barrage occupe toute la largeur du canal; le débit diminue ensuite avec la largeur du déversoir, mais avec plus de rapidité jusqu'à ce que cette largeur soit le quart de celle du canal; au delà de ce point le débit diminue moins rapidement. Voici, à ce sujet, le résumé succinct des observations faites par M. d'Aubuisson. A partir de la largeur du canal, le coefficient $m$ diminue avec la largeur du déversoir jusqu'à ce que celle-ci soit le quart environ de la première, puis il va en augmentant quoique la longueur du déversoir continue à décroître; il convient d'ailleurs de faire observer que la diminution suit celle des longueurs relatives du

déversoir par rapport à la largeur du canal, tandis que l'augmentation qui vient ensuite ne dépend plus que des longueurs absolues.

Lorsque la longueur du barrage est à son *maximum*, ou qu'elle est égale à la largeur du canal, le coefficient $m$, pour différentes charges, reste sensiblement constant et égal à $0^m.665$, la charge étant cependant moindre que le tiers de la hauteur du barrage.

Lorsque la largeur du barrage est comprise entre la largeur du canal et le quart de cette dernière, le coefficient $m$ varie avec le rapport de ces deux grandeurs depuis $0^m.665$, qui est la valeur qui répond à l'égalité, jusqu'à $0^m.595$ qui correspond à la longueur d'un quart.

Enfin lorsque la longueur du barrage descend au-dessous du quart de celle du canal, en restant moindre que $0^m.06$, la largeur du canal n'a plus aucune influence, chaque longueur absolue du barrage a un coefficient qui lui est propre; ces observations ont été suggérées à M. d'Aubuisson par les expériences faites à Toulouse par M. Castel, ingénieur des fontaines de la ville.

237. Nous trouvons dans le deuxième cahier des Annales des Ponts-et-Chaussées de 1836, les résultats de six expériences faites par M. le colonel du génie Lesbros, au moyen d'un petit déversoir de $0^m.20$ de longueur; pour faire apprécier l'exactitude de la formule $Q = Lh'\sqrt{gh'} = 0.385LH\sqrt{2gH}$, nous

avons déterminé le débit qui devait correspondre a chaque expérience, afin que l'on puisse comparer les résultats du calcul avec ceux de l'observation ; mais avant de faire connaître les résultats de ce travail nous devons rappeler que la quantité H est la hauteur de la charge sur le seuil, et qu'elle est égale à $h^{\circ} + h_3$, $h^{\circ}$ étant la hauteur du niveau de l'eau d'amont au-dessus du seuil, prise en un point du courant dont la section est connue, et que $h_3$ est la hauteur due à la vitesse au passage de cette section ; enfin $h'$ est la hauteur de la section qui correspond au seuil que nous savons être égale à $\frac{2}{3}$H ;

Maintenant nous pouvons donner le résultat du calcul simple et facile auquel nous nous sommes livrés.

| Nos d'ordre. | Quantités mesurées. | | Quantités calculées. | | | Différence entre le débit mesuré et le débit calculé. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | H ou hauteur de la charge. | Q Débits obtenus. | Hauteur de la section $h' = \frac{2}{3}$H. | Vitesse moyenne $u = \sqrt{gh'}$ | Débit $Q = Lh'\sqrt{gh'}$ | |
| 1 | 0m0235 | 1l 325 | 0m01566 | 0m3918 | 1l 207 | 0l 098 |
| 2 | 0.0446 | 3.382 | 0.02972 | 0.5399 | 3.210 | 0.172 |
| 3 | 0.0605 | 5.277 | 0.0404 | 0.6295 | 5.0863 | 0.187 |
| 4 | 0.1029 | 11.528 | 0.0686 | 0.82 | 11.25 | 0.278 |
| 5 | 0.1681 | 22.929 | 0.1088 | 1.038 | 22.4788 | 0.451 |
| 6 | 0.2079 | 32.643 | 0.1386 | 1.17 | 32.4324 | 0.212 |

Si les débits que le calcul nous a donnés sont un peu plus faibles que ceux fournis par l'expérience, cela provient de la hauteur de la charge qui, telle qu'elle a été mesurée, est un peu plus faible qu'elle

ne devrait-être, puisqu'elle est seulement égale à $h^{\circ}$ ou à la hauteur effective du niveau de l'eau d'amont au-dessus du seuil, tandis que l'on aurait dû ajouter à la quantité $h^{\circ}$, la hauteur $h_3$ due à la vitesse; la hauteur de la charge étant un peu faible, la hauteur de la section qui en est les $\frac{2}{3}$ est aussi un peu plus faible, et par suite le débit est moindre qu'il ne devrait être.

238. Lorsque l'eau passe sur un déversoir ou sort par un orifice vertical et rectangulaire dont le bord supérieur est au niveau de l'eau, on ne doit pas en conclure que la charge sur le sommet de cet orifice est nulle; pour qu'il en fût ainsi, il faudrait que l'eau n'eût point de vitesse en amont ou que sa surface fût horizontale, ce qui n'a jamais lieu, et lorsque l'écoulement a lieu en déversoir, cette surface affecte souvent une pente très-prononcée.

La charge sur le sommet d'un orifice rectangulaire, suivi d'un coursier, étant toujours ce qui produit la vitesse, il en résulte que quand cette charge est représentée par une hauteur d'eau, la vitesse est évidemment due à cette hauteur; réciproquement, lorsque l'eau sort d'un orifice suivi d'un coursier, avec une vitesse déterminée, on doit considérer la hauteur due à cette vitesse comme représentant la hauteur de la charge sur le bord supérieur de l'orifice; enfin comme nous savons que quand l'écoulement a lieu par un déversoir rectangulaire, la hauteur due à la vitesse est toujours égale à la moitié de

la hauteur de la section qui correspond au seuil, nous devons conclure,

1° Que dans l'écoulement en déversoir, la hauteur de la charge au-dessus du niveau de l'eau, dans la section verticale qui correspond au seuil, est égale à la moitié de la hauteur de cette section ;

2° Que quand l'eau sort d'un orifice vertical et rectangulaire suivi d'un coursier, la hauteur de la charge sur le bord supérieur de l'orifice doit être au moins égale à la moitié de la hauteur de l'orifice;

3° Que quand la hauteur de la charge sur le bord supérieur d'un orifice vertical et rectangulaire suivi d'un coursier est moindre que la moitié de la hauteur de l'orifice, la surface supérieure du liquide ne se maintient à peu près de niveau que par l'adhérence et le frottement contre les parois; si donc on agite la masse de ce liquide, sa surface s'abaissera au-dessous du bord supérieur de l'orifice et l'écoulement aura lieu comme si ce bord n'existait pas ou comme si l'eau sortait d'un déversoir.

## SECTION II.

### *Récepteurs ou moteurs hydrauliques.*

#### I. Considérations générales sur les moteurs.

239. Lorsque l'on veut faire sortir un corps de l'état de repos dans lequel il se trouve, ou plus généralement exercer sur ce corps une certaine action, nous l'avons déjà dit, il faut faire agir un autre corps sur lui, et par conséquent pouvoir disposer d'une *force motrice* ou d'un *moteur*, car on appelle moteur tout ce qui peut faire naître le mouvement, tout ce qui peut développer une certaine quantité d'action que l'on peut employer à vaincre des résistances ou à effectuer un travail.

La plus grande quantité d'action qu'un moteur puisse développer dans un temps donné est ce que nous avons appelé la puissance absolue de ce moteur, sa puissance relative est la quantité d'action qu'il peut développer dans des circonstances données qu'il ne faut pas confondre avec la quantité d'action qu'il est possible de recueillir et d'utiliser.

Tout moteur exécute un travail au moyen d'un intermédiaire indispensable que l'on appelle une machine qui se réduit parfois à un simple outil.

Les machines qui servent à opérer un travail ou une fabrication continue présentent ordinairement trois parties distinctes :

1° La partie destinée à recueillir la quantité d'ac-

tion que développe le moteur s'appelle le récepteur; les roues hydrauliques et les chaudières à vapeur sont des récepteurs;

2° La partie qui transmet la quantité d'action recueillie par le récepteur se compose des organes de transmission; les engrenages, les bielles, les courroies, certains axes en fer ou en bois sont des organes de ce genre;

3° Enfin la partie qui effectue le travail et qui comprend nécessairement les outils qui agissent directement sur les matières à combiner ou à transformer. Ces trois parties ne sont pas toujours nécessaires, et il existe plusieurs machines qui n'en présentent que deux ou même une seule.

Nous n'aurons à nous occuper ici que des récepteurs destinés à recueillir et transmettre la quantité d'action que possèdent les eaux courantes. Ces récepteurs, qui comprennent les roues hydrauliques, sont généralement désignés sous le nom de moteurs hydrauliques.

340. Nous avons appris dans les premiers livres à mesurer le volume d'eau que débite un courant dans chaque unité de temps; si ce volume est retenu par une digue ou barrage de manière à être obligé de tomber d'une hauteur H ou de sortir pressée par une colonne d'eau d'une hauteur égale à H, sa masse que nous désignerons par M, développera dans ces deux circonstances une quantité d'action égale à $MgH$, et si l'on représente par V la vitesse due à la hauteur

H, on aura $MgH = \frac{MV^2}{2}$. Le produit $MgH$ est l'expression de la puissance du courant au point considéré, et l'équation précédente fait connaître les deux formes de cette expression.

La quantité d'action qu'un récepteur peut recueillir est toujours moindre que la puissance du moteur, même lorsque théoriquement ces deux quantités devraient être égales, et la quantité d'action que peut transmettre un récepteur est encore moindre que celle qu'il recueille, parce que les pertes, frottements et résistances inhérentes à tout système physique absorbent inutilement une certaine quantité d'action.

La quantité d'action recueillie dépend de la forme du récepteur, de sa disposition plus ou moins parfaite, enfin de sa construction.

La quantité d'action transmise dépend de la disposition de toute la machine et surtout de la simplicité de son organe de transmission.

241. Lorsqu'un courant, animé d'une vitesse $u$, arrive dans un récepteur en un point dont la vitesse est $v$, suivant la direction de $u$, il se produit un choc qui réduit la vitesse d'une quantité égale à $u - v$, et qui fait perdre en ébranlements et tournoiements une force vive égale à $\frac{M}{2}(u - v)^2$. La puissance de ce moteur qui, primitivement, était égale à $\frac{MV^2}{2}$, se trouve donc réduite à $\frac{M}{2}(V^2 - (u - v)^2)$; cette expression est la

mesure de la puissance relative ou de la plus grande quantité d'action que dans cette circonstance le moteur puisse transmettre au recepteur. Si $u'$ est la vitesse absolue que conserve encore le moteur au moment où il sort du récepteur, la quantité d'action qu'il possède à cet instant, qui est égale à $\frac{Mu'^2}{2}$, sera perdue pour le récepteur, ne pourra pas être recueillie par lui, en sorte que la plus grande quantité d'action que, dans les circonstances admises, le récepteur pourra recueillir sera égale à

$$\frac{M}{2}(V^2-(u-v)^2-u'^2);$$

par conséquent, cette quantité, toujours moindre que la puissance relative du moteur, ne pourra atteindre les limites de cette puissance que quand on aura $u'=o$ ou lorsque le moteur sortira du récepteur avec une vitesse absolue, nulle. La vitesse perdue $u-v$ et la vitesse conservée $u'$ tendent donc toutes les deux à diminuer la quantité d'action qui peut être recueillie par le récepteur; lorsque ces deux vitesses seront nulles, la quantité d'action recueillie pourra être égale à $\frac{MV^2}{2}$ ou à la puissance absolue du moteur.

Les circonstances seront donc les plus favorables lorsque l'on aura $u=v$ et $u'=o$; mais lorsque la vitesse d'entrée du moteur est égale à celle du récepteur et dirigée dans le même sens, il n'y a pas de choc, et de plus $u'$ étant nul, le moteur a une vitesse

absolue nulle au moment où il abandonnera le récepteur; par conséquent, pour qu'un récepteur hydraulique puisse recueillir toute la quantité d'action que développe une chute d'eau alimentée par un courant, il est nécessaire que le *liquide entre et agisse sans choc et sorte sans vitesse.*

242. Si F représente l'effort que le recepteur doit exercer en un point déterminé qui doit se mouvoir avec la vitesse $v'$ dans la direction de l'effort; lorsque le mouvement sera parvenu à l'uniformité, la quantité d'action $Fv'$ absorbée par ce travail devra être précisément égale à celle recueillie par le récepteur, c'est-à-dire que dans les circonstances admises, on devra avoir $Fv' = \frac{M}{2}(V^2 - (u - v)^2 - u'^2)$

$$\text{d'où } Fv' + \frac{Mu'^2}{2} = \frac{M}{2}(V^2 - (u - v)^2),$$

par conséquent la somme des quantités d'action recueillie par le récepteur et conservée par le moteur doit toujours être égale à la puissance relative de ce moteur.

Il ne faut pas confondre la quantité $Fv'$ ou la quantité d'action que peut recueillir le récepteur avec celle qu'il recueille réellement et surtout avec celle qu'il transmet aux autres parties de la machine pour effectuer le travail utile, car outre les pertes qui ont lieu dans le récepteur même, les frottements et autres résistances inhérentes au mécanisme ou aux organes de transmission absorbent une portion plus

ou moins considérable de la quantité d'action recueillie.

Si P représente la somme des quantités d'action absorbées par les différentes causes de pertes, il restera $Fv' - P$ pour la quantité d'action qui produit l'effet utile, cette quantité sera la plus grande possible lorsque P sera le plus petit ou lorsque le mécanisme sera aussi bien disposé que bien établi.

Nous pouvons maintenant nous occuper des récepteurs hydrauliques ou des appareils destinés à recueillir et transmettre la puissance de l'eau. Ces appareils sont ordinairement des roues; cependant les chapelets verticaux et inclinés peuvent également servir de récepteurs.

Les roues hydrauliques sont mues par le choc ou par la pression de l'eau, mais le plus ordinairement par la pression sans choc; ces roues sont verticales ou horizontales.

### II. Des roues verticales.

243. Il existe cinq espèces de roues verticales qui sont:

1° Les roues à aubes planes mues par le choc de l'eau qui s'échappe de la partie inférieure d'un réservoir maintenu à un niveau constant;

2° Les roues à aubes planes mues par la pression de l'eau d'un courant dans lequel les aubes sont plongées;

3° Les roues à coursier circulaire, dites roues de côté, qui sont des roues à aubes planes mues par la

pression de l'eau sortant d'un réservoir maintenu à un niveau constant;

4° Les roues à godets, mues par le choc et la pression de l'eau qui sort d'un réservoir également maintenu à un niveau constant;

5° Les roues à aubes courbes, mues par la pression de l'eau qui sort de la partie inférieure d'un réservoir toujours maintenu à un niveau constant.

Désignons toujours par M la masse du volume d'eau que le courant débite dans chaque unité de temps ou qui est fournie par un réservoir maintenu à un niveau constant;

Par H la hauteur totale de la chute;

Par V la vitesse due à cette hauteur;

Par $v$ la vitesse d'un point de la circonférence décrite par le centre des aubes ou des augets;

Par F l'effort exercé par la roue et rapporté au centre des aubes ou des augets;

Par $u$ la vitesse de l'eau à son entrée sur la roue;

Par $u'$ la vitesse conservée par l'eau à sa sortie de la roue; d'après ce que nous venons de voir nous aurons l'équation générale $Fv + \frac{Mu'^2}{2} = \frac{M}{2}(V^2 - (u - v)^2)$; cette équation s'applique sans difficultés aux différents systèmes de roues lorsqu'on a soin de remplacer $u$ et $u'$ par les valeurs qui dérivent du système de chaque roue, comme on va le reconnaître par ce qui suit.

244. Considérons d'abord les roues verticales à

aubes planes qui sont mues par le choc de l'eau contre les aubes (fig. 32).

Dans ce système l'eau arrive sur les aubes avec la vitesse V due à la hauteur H de la chute, choque les aubes et les abandonne en conservant une vitesse $v$ égale à celle de la roue, on a donc ici $V = u$ et $u' = v$, ce qui change l'équation générale en

$$Fv + \frac{Mv^2}{2} = \frac{M}{2}(V^2 - (V - v)^2),$$

c'est-à-dire que la quantité d'action perdue pendant le choc a pour expression $\frac{M}{2}(V - v)^2$; celle que le liquide peut transmettre, ajoutée à celle qu'il conserve en abandonnant la roue, est exprimée par $\frac{M}{2}(V^2 - (V^2 - v)^2) = \frac{M}{2}(2V - v)v$; et pour que la puissance relative soit utilisée, il faut que l'on ait

$$Fv + \frac{Mv^2}{2} = \frac{M}{2}(2V - v)v,$$

ce qui donne pour la quantité d'action recueillie par le récepteur $Fv = M(V - v)v$, et pour l'effort

$$F = M(V - v).$$

Remarquons que la puissance relative du moteur devenant nulle lorsque $v = 2V$, et devenant encore nulle lorsque $v = o$, a une valeur maxima qui correspond à $v = V$, cette valeur est $\frac{MV^2}{2}$, c'est-à-dire qu'elle est égale à la puissance absolue. Cette valeur de $v = V$ donne $F = o$, comme cela doit être; en effet,

le moteur conservant toute sa puissance, le récepteur ne peut en recueillir aucune partie.

Lorsque la masse M n'est pas susceptible de varier, la plus grande valeur de l'effort correspond à $v = o$, on a alors $F = MV$, cet effort n'est plus qu'une pression exercée sur un point fixe, laquelle est égale à la quantité de mouvement que possède le moteur.

La quantité d'action recueillie par le récepteur étant $Fv = M(V - v)\,v$ sa valeur maxima correspond à $v = \frac{V}{2}$, elle est alors $Fv = \frac{MV^2}{4} = \frac{MgH}{2}$, c'est-à-dire qu'elle est égale à la moitié de la puissance absolue du moteur.

Par la considération des quantités de mouvement, on peut obtenir d'une manière bien simple les résultats auxquels nous venons de parvenir; en effet MV étant la quantité de mouvement que possède le liquide lorsqu'il arrive sur les aubes, $Mv$ celle qu'il conserve sur la même direction lorsqu'il abandonne la roue, la quantité de mouvement que le récepteur reçoit et qu'il peut transmettre est donc égale à $MV - Mv$; si on la désigne par F on aura $F = M(V - v)$, et pour la quantité d'action que recueille le récepteur $Fv = M(V - v)v$, résultat identique avec celui trouvé ci-dessus.

Si les aubes ferment complétement le passage de manière que l'eau après le choc contre les aubes ne puisse s'échapper immédiatement, alors cette eau prend une vitesse précisément égale à celle des aubes,

et si A est l'aire de la partie plongée de l'aube dans la direction verticale, $Av$ sera le volume d'eau dépensé dans l'unité de temps, on devra donc avoir $M = \frac{\pi}{g}Av$, puis $F = \frac{\pi}{g}A(V - v)v$ et $Fv = \frac{\pi}{g}A(V - v)v^2$, alors l'effort sera le plus grand possible lorsque l'on aura $v = \frac{V}{2}$, et la quantité d'action recueillie atteindra sa valeur maxima lorsque $v = \frac{2}{3}V$, ou lorsque la vitesse de la roue est égale aux $\frac{2}{3}$ de la vitesse du moteur.

La valeur maxima de l'effort est égale à $\frac{\pi}{g}\frac{AV^2}{4}$ ou à la moitié de la quantité de mouvement que possède le moteur.

La valeur maxima de la quantité d'action que peut recueillir le récepteur est égale à $\frac{4\pi}{27g}AV^3 = \frac{4}{9} \times \frac{MV^2}{2}$.

245. Considérons maintenant une roue à aubes mue par la pression dans un courant à grande largeur telle que celles que l'on voit encore sur quelques-unes de nos grandes rivères (fig. 33).

Si l'on connaissait la masse M de liquide qui dans chaque unité de temps agit sur l'aube, l'effort du moteur serait précisément égal à la quantité de mouvement que cette masse laisse sur l'aube, c'est-à-dire que l'on aurait $F = M(V - v)$ et $Fv = M(V - v)v$, expressions dans lesquelles M est inconnue; pour en trouver la valeur remarquons que si nous désignons par A l'aire de la partie plongée de l'aube lorsqu'elle

est perpendiculaire à la direction du courant, et par $h$ la hauteur due à la pression qu'éprouve cette aube, nous aurons pour cette pression $F = \pi A h$, mais la hauteur $h$ est évidemment due à la différence des vitesses ou à $\frac{(V-v)^2}{2g}$, car cette hauteur doit être nulle lorsque $v = V$, et elle doit être égale à $\frac{V^2}{2g}$ lorsque $v = o$, on aura donc $M(V-v) = \frac{\pi A(V-v)^2}{2g}$, d'où $M = \frac{\pi A(V-v)}{2g}$; c'est-à-dire que la masse cherchée est celle du volume dont la section est A et dont la longueur est $\frac{V-v}{2}$.

La valeur maxima de la quantité d'action recueillie par le récepteur correspond à $v = \frac{V}{3}$, par conséquent les roues à aubes mues par la pression de l'eau d'une rivière, que l'on appelle roues suspendues, recueillent la plus grande quantité d'action, lorsque la vitesse du centre des aubes est le tiers de la vitesse du courant. Cette quantité d'action s'élève aux $\frac{4}{9}$ de celle que possède la partie de l'eau qui agit sur les roues.

La quantité d'action conservée par l'eau lorsqu'elle abandonne les aubes étant $\frac{Mv^2}{2} = \frac{\pi A}{2g}(V-v)v^2$, on reconnaît qu'elle est la plus petite possible lorsque l'on a $v = o$ et $v = V$, et qu'elle atteint sa valeur maxima lorsque $v = \frac{2V}{3}$; cette quantité est alors égale

à la quantité d'action que recueille le récepteur.

246. Occupons-nous actuellement des roues à coursier circulaire dites roues de côté, mues par le poids de l'eau. L'eau est reçue dans des augets à peu de hauteur au-dessous du centre de la roue ; mais pour prévenir les pertes qui ont lieu vers le bas, la roue est contenue dans un coursier qui laisse aux aubes le moins de jeu possible (fig. 34).

Reprenons la formule générale

$$Fv+\frac{Mu'^2}{2}=\frac{M}{2}(V^2-(u-v)^2) \text{ ou } Fv=\frac{M}{2}(V^2-(u-v)^2-u'^2),$$

et cherchons quelles sont les relations qui sur cette roue peuvent exister entre les vitesses $v$, $u$ et $u'$; nous devons d'abord remarquer que sur ces roues la vitesse de sortie $u'$ est toujours égale à la vitesse $v$ de la roue, ce qui donne $u'=v$.

Remarquons ensuite que la puissance relative du moteur sera la plus grande possible et égale à sa puissance absolue lorsque l'on aura $Fv+\frac{Mv^2}{2}=\frac{MV^2}{2}$, ce qui donne $u=v$; par conséquent lorsque l'on sera maître de régler la vitesse d'entrée, il sera avantageux de la faire égale à celle que doit avoir la roue.

Dans cette circonstance, la quantité d'action recueillie par le récepteur sera $Fv=\frac{M}{2}(V^2-v^2)$, quantité qui sera nulle lorsque l'on aura $v=V$ et qui augmentera à mesure que $v$ diminuera ; mais comme la vitesse de la roue ne peut pas être nulle, il en ré-

sulte que la quantité d'action recueillie par le récepteur n'est pas susceptible de maxima et qu'elle sera toujours moindre que celle développée par le moteur.

Lorsqu'une roue est construite et que la hauteur de la chute est déterminée, alors $u$ ne peut plus être égale à $v$, mais, dans cette circonstance, on peut régler la vitesse $v$ de la roue de manière à recueillir la plus grande quantité d'action ; en effet, cette quantité d'action ayant pour expression $Fv = \frac{M}{2}(V^2 - (u-v)^2 - v^2)$ elle sera d'autant plus grande que $(u-v)^2 + v^2$ sera petit, or la valeur minima de cette quantité correspond à $v = \frac{u}{2}$, c'est-à-dire qu'une roue construite recueillera la plus grande quantité d'action, lorsque sa vitesse sera égale à la moitié de celle de l'eau au moment de son entrée sur ce récepteur.

Si l'on pouvait avoir $u = o$, ou si l'eau pouvait entrer sans vitesse dans la roue, on aurait

$$Fv = \frac{M}{2}(V^2 - 2v^2),$$

c'est-à-dire que l'effort et la quantité d'action recueillie seraient nuls, si l'on avait $v = \frac{V}{\sqrt{2}}$.

247. La théorie que nous venons d'exposer pour les roues de côté, convient également pour les roues à augets (fig. 35). Dans ces récepteurs l'eau est reçue dans les augets à peu de distance du sommet et descend avec la vitesse V de la roue, on a encore ici

$Fv = \frac{M}{2}(V^2 - (u - v)^2 - v^2)$ ; et l'on trouve que quand l'eau peut entrer sans choc, il y a un grand avantage dans ce système, comme dans le précédent, à ralentir le mouvement de la roue; mais il convient de faire remarquer que la limite de la valeur de $v$ dépend du plus grand volume d'eau que peut contenir la roue ; en effet si Q est le volume qui correspond à la masse M et que la roue puisse contenir un volume d'eau égal à $n$Q, l'arc qui contient l'eau étant une certaine portion de la circonférence de la roue, dont nous supposons le rayon égal à R, cet arc pourra être représenté par $\frac{2\pi R}{\alpha}$, et comme il mettra $n$ secondes à passer par un point déterminé, il en résulte que la plus petite vitesse que puisse prendre la roue est égale à $\frac{2\pi R}{n\alpha}$ ; c'est à cette vitesse que correspondra la plus grande quantité d'action que la roue puisse recueillir.

L'équation $Fv = \frac{M}{2}(V^2 - v^2)$ semble indiquer que l'effort deviendrait infini si la vitesse $v$ était nulle, mais nous venons de voir que la plus petite vitesse que la roue puisse prendre dépend du plus grand volume d'eau qu'elle peut contenir ; lorsque cette limite est atteinte, l'eau qui continue de tomber sur la roue n'étant plus reçue ne saurait contribuer à augmenter l'effort qui a par conséquent pour limite celui qui a lieu lorsque $v = \frac{2\pi R}{n\alpha}$.

248. Dans la roue verticale à aubes courbes, l'eau n'exerce aucun choc à son entrée et sort avec une vitesse très-faible (fig. 36). Puisque l'eau entre sans choc, le terme de la formule générale relatif à la force vive perdue par le choc disparaît, et il reste $Fv + \frac{Mu'^2}{2} = \frac{Mv^2}{2}$, c'est-à-dire que la puissance relative du moteur est égale à sa puissance absolue. Quant à la quantité d'action que le récepteur peut recueillir, elle est $Fv = \frac{M}{2}(V^2 - u'^2)$, et sera d'autant plus grande que la vitesse $u'$ de l'eau à sa sortie de la roue sera plus petite.

Cherchons la relation qui existe sur cette roue entre la vitesse d'arrivée, qui ici est égale à V, la vitesse de la roue $v$ et la vitesse de sortie $u'$.

La vitesse d'arrivée étant V et la vitesse de la roue $v$, la vitesse relative de l'eau à son entrée sur la roue est d'abord $V - v$, puis l'eau continuant à s'élever sur les aubes, cette vitesse s'éteint et l'eau commence à descendre pour reprendre, en sens contraire du mouvement, la vitesse $V - v$ qu'elle acquiert en arrivant à l'extrémité de l'aube. La vitesse absolue de l'eau au moment où elle quitte la roue est alors $v - (V - v) = 2v - V$, on a donc $u' = 2v - V$, puis pour la quantité d'action recueillie

$$Fv = \frac{M}{2}(V^2 - (2v - V)^2) = 2M(V - v)v,$$

et pour l'effort $F = 2M(V - v)$.

La quantité d'action recueillie atteint sa valeur maxima lorsque l'on a $v = \frac{V}{2}$; dans cette circonstance l'effort $F = MV$ est donc égal à la quantité de mouvement que possède le moteur, la vitesse absolue de sortie est nulle, et la quantité d'action recueillie est égale à celle que développe le moteur ou à sa puissance absolue; les roues de ce genre sont ainsi bien préférables aux roues verticales à aubes planes.

### III. Roues horizontales.

249. Les roues horizontales ou tournant sur un axe vertical, sont de divers genres; les unes sont mues par le choc de l'eau et les autres par pression sans choc.

On distingue cinq espèces de roues horizontales, qui sont.

1° Les *roues à palettes*, lesquelles sont mues par le choc d'une veine fluide;

2° Les *roues d'Euler* où l'eau entre par la face supérieure de la roue et descend le long des aubes en restant à une distance constante de l'axe. Ces aubes ont la forme d'une surface hélicoïde.

3° Les *roues* dites *à réaction* où l'eau entre avec peu de vitesse et sort par des orifices verticaux.

4° Les *roues* appelées *danaïdes*, où l'eau entre avec une grande vitesse par la face supérieure de la roue, et descend en s'approchant de l'axe; les aubes de cette roue sont à surface hélicoïde.

5° *Les roues à aubes courbes et verticales*, où l'eau se meut horizontalement; ces roues sont connues généralement sous le nom de *turbines-Fourmeyron.*

250. Dans les roues horizontales à palettes (fig. 37) mues par le choc d'une veine liquide, l'eau jaillit au bas de la chute par un ou plusieurs tuyaux horizontaux dont la direction est perpendiculaire à celle des aubes et se rend dans le bief inférieur en conservant une vitesse égale à celle de la roue.

Dans l'expression générale de la puissance relative $Fv + \frac{Mu'^2}{2} = \frac{M}{2}(V^2 - (u - v)^2)$, on a $u = V$ et $u' = v$; en sorte que la quantité d'action recueillie est $Fv = M(V - v)v$, quantité qui atteint sa valeur maxima lorsque $v = \frac{V}{2}$, on a alors $F = \frac{MV}{2}$ et $Fv = \frac{MV^2}{4}$, comme dans les roues verticales à aubes planes.

Si le filet d'eau au lieu d'être horizontal et perpendiculaire à la direction des palettes faisait un certain angle avec l'horizon et même avec la direction de la palette, cela compliquerait inutilement la question, car il est évident que la direction du filet d'eau doit être normale au plan tangent de la palette au point où le choc a lieu. Si le plan tangent à la palette faisait un angle $\alpha$ avec l'horizon, $v$ étant toujours la vitesse horizontale de la roue, le filet devant arriver normalement à la palette, devrait faire avec le plan horizontal un angle de $90° - \alpha$; aussi, après le choc, la vitesse de l'eau dans la direction du filet

serait réduite à $v\sin\alpha$, on aurait donc pour la puissance relative du moteur

$$Fv + \frac{M}{2}v^2\sin^2\alpha = \frac{M}{2}(V^2 - (V - v\sin\alpha)^2)$$

pour la quantité d'action recueillie par le récepteur $Fv = M(V - v\sin\alpha)v\sin\alpha$, et pour l'effort que ce récepteur pourrait exercer $F = M(V - v\sin\alpha)\sin\alpha$.

La valeur maxima de la quantité d'action recueillie correspondrait à $v = \frac{V}{2\sin\alpha}$ et serait $Fv = \frac{MV^2}{4}$, comme dans les roues verticales à aubes planes ; on aurait pour la valeur de l'effort $F = \frac{MV}{2}\sin\alpha$, c'est-à-dire qu'elle serait moindre que celle de l'effort que peuvent exercer les roues verticales.

Il convient de faire observer que dans ces roues, on peut en réglant convenablement l'inclinaison des palettes et la direction de la veine d'eau augmenter à volonté la vitesse, en recueillant toujours une quantité d'action égale à $\frac{MV^2}{4}$ ou à la moitié de la puissance absolue du moteur ; mais l'effort F étant proportionnel à $\sin\alpha$, il diminuera en raison inverse de l'augmentation de la vitesse de manière que le produit $Fv$ reste constant.

251. Pour se figurer les roues à surfaces héliçoïdes, il suffit de se représenter une vis d'Archimède verticale et à plusieurs nappes qui soit comprise entre deux cylindres verticaux dont la hauteur soit moindre que celle de la chute (fig. 38).

Dans cette roue, l'eau contenue dans un réservoir sort par des ajutages évasés, entre par la face supérieure dans les canaux compris entre les aubes, et s'échappe par les orifices inférieurs des mêmes canaux après être restée à une distance constante de l'axe.

L'eau n'éprouvant aucun choc à son entrée dans la roue, la quantité d'action qui peut être recueillie a pour expression $Fv = \frac{M}{2}(V^2 - u'^2)$ ; cherchons, d'après les données qui résultent de la description de cette roue, les relations qui existent entre V, $v$, $u$ et $u'$, qui sont les vitesses absolues de la roue et de l'eau à son entrée et à sa sortie, et V la vitesse due à la hauteur H de la chute.

Désignons par $v'$ la vitesse moyenne et relative que l'eau prend sur l'aube à son entrée sur la roue, par $\alpha$ l'angle que fait avec l'horizon la direction de la vitesse d'entrée $u$.

Par $v''$ la vitesse moyenne et relative que l'eau conserve sur l'aube au moment où elle est sur le point de sortir de la roue, par $\beta$ l'angle que fait avec l'horizon la direction de cette vitesse.

On devra avoir $v'^2 = u^2 + v^2 - 2uv\cos\alpha$, car il faut qu'en annullant la vitesse $v$, $v'$ devienne égale à $u$; en effet si l'on introduit dans le système une vitesse égale et contraire à la vitesse $v$, la roue sera réduite au repos tandis que l'eau se mouvra sur l'aube en vertu de la vitesse $u$.

On aura de même pour la vitesse absolue de sortie $u'$, $u'^2 = v''^2 + v^2 - 2vv''\cos\beta$, puisqu'il faut qu'en annullant la vitesse $v$ on ait $u' = v''$ ; mais si $h$ est la hauteur due à la vitesse $u$, comme H est la hauteur due à la vitesse V, l'épaisseur ou la hauteur de la roue sera $H - h = \frac{V^2 - u^2}{2g}$, la quantité d'action développée par le moteur pendant qu'il reste sur la roue a donc pour expression $\frac{M}{2}(V^2 - u^2)$; mais quand on néglige les frottements, cette quantité doit être égale à l'accroissement de la force vive du liquide pendant qu'il descend sur les aubes, ou à $\frac{M}{2}(v''^2 - v'^2)$, c'est-à-dire que l'on doit avoir $v''^2 - v'^2 = V^2 - u^2$ ; mais les valeurs de $v'^2$ et de $u'^2$ donnent

$$v''^2 - v'^2 = u'^2 - u^2 + 2v((u\cos\alpha + v''\cos\beta) - v),$$

il faut donc que l'on ait

$$V^2 - u'^2 = 2v((u\cos\alpha + v\cos\beta) - v);$$

la quantité d'action recueillie par cette roue devient ainsi $Fv = M(u\cos\alpha + v''\cos\beta - v)v$, et l'effort qu'elle peut exercer a pour expression

$$F = M(u\cos\alpha + v''\cos\beta - v).$$

Sur une roue construite, les angles $\alpha$ et $\beta$ étant déterminés, la quantité d'action recueillie sera la plus grande possible lorsque l'on aura $v = \frac{u\cos\alpha + v''\cos\beta}{2}$; cette quantité se réduirait à $v = \frac{u + v''}{2}$, si l'on pouvait avoir $\alpha = o$ et $\beta = o$, ou si l'eau pouvait entrer

dans la roue et en sortir suivant une direction horizontale.

Si l'eau arrive verticalement et sort horizontalement on aura $\cos\alpha = o$, $\cos\beta = 1$, et par suite

$$Fv = M(v'' - v)v,\ u'^2 = V^2 + 2v^2 - 2vv'',$$
$$v'^2 = u^2 + v^2,\ v''^2 = V^2 + v^2.$$

Si l'eau entre horizontalement et sort verticalement on aura $\cos\beta = o$ et $\cos\alpha = 1$, ce qui donnera

$$Fv = M(u - v)v,\ u'^2 = V^2 + 2v^2 - 2uv = v''^2 + v^2,$$
$$v'^2 = (u - v)^2.$$

Si la vitesse de sortie $v''$ devait être égale à celle de la roue on aurait $v = v''$ et $\cos\beta = 1$, ce qui donnerait $u' = o$ et $V^2 = 2uv\cos\alpha$; c'est la condition nécessaire pour que l'eau sorte sans vitesse; en effet cette condition étant $u' = o$, il en résulte que

$$V^2 = 2(u\cos\alpha + v''\cos\beta - v)v,$$

mais pour que l'eau ne conserve aucune vitesse en quittant la roue, il faut que la vitesse qu'elle a sur le dernier élement de l'aube soit égale et directement opposée à celle de la roue; comme cette dernière vitesse est horizontale, il faut donc que la vitesse sur le dernier élément de l'aube soit horizontale, et par suite que l'élément soit lui-même horizontal; il faut donc que l'on ait $v = v''$ et $\beta = o$, d'où $V^2 = 2uv\cos\alpha$.

La force centrifuge, à laquelle il faut en général avoir égard, n'exerce ici aucune action, puisque le liquide reste à une distance constante de l'axe.

252. Les roues à réaction se composent d'un

tuyau vertical dont l'axe se confond avec celui de la roue (fig. 39) ; l'eau entre avec peu de vitesse en des points très-rapprochés de l'axe et sort par des orifices verticaux distribués symétriquement à une certaine distance de l'axe et situés sur la direction des rayons qui leur correspondent.

L'eau entrant sans choc, la quantité d'action que la roue peut recueillir a pour expression

$$Fv = \frac{M}{2}(V^2 - u'^2),$$

dans laquelle $v$ est la vitesse de la roue, V la vitesse absolue du moteur, laquelle est due à la hauteur H de la chute, $u'$ la vitesse absolue que le liquide conserve au moment où il quitte la roue, vitesse que nous ne connaissons pas et qu'il faut chercher à déterminer au moyen des relations qui existent entre cette vitesse, celle de la roue et celle du moteur. Pour y parvenir, remarquons que la vitesse relative que l'eau possède à la sortie de l'orifice est due à la pesanteur et à la force centrifuge que développe le mouvement de rotation de la roue.

Or, quand la roue tourne, la vitesse $v$ de cette roue augmente la pression, provenant du poids du liquide, d'une quantité due à la même hauteur que celle due à la vitesse ; la pression qui aura lieu contre les orifices sera donc due à la hauteur totale de la chute, plus à la hauteur due à la vitesse de rotation, c'est-à-dire qu'en appelant $v''$ la vitesse relative de l'eau sur la roue au moment de son passage

par les orifices, on devra avoir $\frac{v''^2}{2g}=\frac{V^2}{2g}+\frac{v^2}{2g}$, ou simplement $v''^2=V^2+v^2$. Dans le numéro précédent, nous avons trouvé

$$v''^2=V^2-u^2+v'^2=V^2+v^2-2uv\cos\alpha,$$

il convient de remarquer que cette équation donne $v''^2=V^2+v^2$, lorsque l'on fait $\cos\alpha=o$, ou $\alpha=90°$, c'est-à-dire lorsque la vitesse d'arrivée a une direction verticale, ce qui est le cas de la roue dont nous nous occupons.

Le mouvement de la roue emportant l'eau en sens contraire avec la vitesse $v$, il en résulte que la vitesse absolue $u'$ de l'eau au moment où elle s'échappe sera égale à la vitesse relative $v''$ diminuée de $v$, on aura donc $u'=v''-v=\sqrt{V^2+v^2}-v$, cette valeur de $u'$ introduite dans l'expression générale de la quantité d'action qu'il est possible de recueillir donnera

$$Fv=\frac{M}{2}(V^2-(\sqrt{V^2+v^2}-v)^2)=M(\sqrt{V^2+v^2}-v)v$$

et $F=M(\sqrt{V^2+V^2}-v)$, expression qu'on aurait pu obtenir de celles du numéro précédent en y faisant $\cos\alpha=o$, $\cos\beta=1$ et $v''=\sqrt{V^2+v^2}$.

Lorsque $v=o$, l'effort $F=MV$ comme dans tous les récepteurs hydrauliques ; sur cette roue, l'effort ne peut être nul qu'autant que le moteur est sans force ou sans puissance, car $F=o$ donne $V=o$.

Lorsque l'effort F sera obligatoire on aura pour la

vitesse que la roue peut prendre en exerçant cet effort $v = \frac{MV^2}{2F} - \frac{F}{2M}$.

La valeur général de $v$, trouvée dans le numéro précédent, qui correspond à la plus grande quantité d'action qu'il soit possible de recueillir, étant $v = \frac{V^2}{2u \cos \alpha}$, nous devons faire remarquer que dans la roue dont nous nous occupons, si la vitesse d'arrivée $u$ n'est pas nulle, comme elle doit toujours être fort petite, il en résulte que la quantité d'action recueillie augmentera sans cesse avec la vitesse sans avoir une valeur maxima absolue.

253. Le caractère des danaïdes consiste en ce que le point où l'eau sort de la roue est plus rapproché de l'axe que celui par où elle entre, il en résulte que le mouvement de l'eau dans la roue est modifié par la hauteur dont elle descend et par l'action de la force centrifuge (fig. 40).

L'eau entrant sans choc, la quantité d'action que la roue peut recueillir a pour expression, comme ci-dessus, $Fv = \frac{M}{2}(V^2 - u'^2)$ dans laquelle on ne connaît pas la valeur de $u'$ ; pour la trouver conservons les mêmes notations que dans les numéros précédents, nous aurons encore $v''^2 = u^2 + v^2 - 2uv \cos \alpha$.

La variation de la force vive pendant que l'eau reste sur la roue sera $\frac{M}{2}(v''^2 - v'^2)$ ; cette variation est due à la pesanteur et à l'action de la force centri-

fuge lorsque l'on néglige les frottements ; la partie de cette variation due à la pesanteur est $\frac{M}{2}(V^2 - u^2)$; pour déterminer la partie de cette variation due à la force centrifuge, désignons par $\delta$ la vitesse angulaire de la roue, par $m$ un élément de la masse du liquide qui se meut dans la roue, par $r$ la distance de cette masse à l'axe, alors nous aurons pour l'expression de la quantité d'action due à la force centrifuge $\int m\delta^2 r dr$ intégrale qu'il faudra prendre depuis le rayon $r_0$ du point d'entrée jusqu'au rayon $r_,$ du point de sortie, ce qui donnera $\int m\delta^2 r dr = \frac{M}{2}\delta^2(r_,^2 - r_0^2)$; si $v$ est la vitesse de la roue au point d'entrée, et si nous nous représentons par $v_,$ la vitesse de la roue au point de sortie, on aura $\delta r_, = v_,$ et $\delta r_0 = v$ par conséquent,

$$\frac{M}{2}(v''^2 - v'^2) = \frac{M}{2}(V^2 - u^2) + \frac{M}{2}(v_,^2 - v^2)$$

ou simplement $v''^2 - v'^2 = V^2 - u^2 + v_,^2 - v^2$.

On a d'ailleurs

$$u'^2 = v_,^2 + v''^2 - 2v_,v''\cos\beta = V^2 - 2u v\cos\alpha + 2v\left(\frac{r_,^2}{r_0^2}v - v''\cos\beta\frac{r_,}{r_0}\right);$$

cette valeur de $u'^2$ substituée dans l'expression générale de la quantité d'action à recueillir donne

$$Fv = Mv\left(u\cos\alpha - \frac{r_,}{r_0}\left(\frac{r_,}{r_0}v - 2v''\cos\beta\right)\right).$$

Pour que la quantité d'action recueillie soit égale à la puissance absolue du moteur, il est nécessaire que la vitesse absolue de l'eau à la sortie de la roue soit nulle, ce qui donne $u' = 0$ ou $v_,^2 + v'^2 - 2v_,v''\cos\beta = 0$,

turbine recueillera toute la quantité d'action que développe le moteur.

Pour déterminer la valeur de $u'$, conservons les mêmes désignations que ci-dessus, et remarquons que la variation de la force vive que l'eau éprouvera à son passage sur la roue, aura pour expression $\frac{M}{2}(v''^2 - v'^2)$; mais cette variation étant uniquement due à la force centrifuge, devra être égale à la quantité d'action due à cette force; or, si nous appelons R le rayon du contour extérieur de la roue, $r$ le rayon de son contour intérieur, $\delta$ sa vitesse angulaire, la quantité d'action due à la force centrifuge aura pour expression $\frac{M}{2}(\delta^2 R^2 - \delta^2 r^2)$. Si nous désignons par $v_,$ la vitesse des points de la circonférence intérieure de la roue on aura $v_, = \delta r$, $v = \delta R$ et par suite

$$v''^2 - v'^2 = v^2 - v_,^2.$$

Nous avons d'ailleurs

$$v'^2 = u^2 + v_,^2 - 2uv_, \cos\alpha \quad \text{et} \quad u'^2 = v^2 + v''^2 - 2vv'' \cos\beta,$$

$\alpha$ et $\beta$ étant les angles que font respectivement les vitesses d'entrée et de sortie avec les vitesses $v$ et $v_,$ des points des deux circonférences de la roue, et comme la vitesse d'entrée $u$ est due à la hauteur de la chute, il en résulte que l'on a $u = V$ et par suite

$$u'^2 = V^2 + 2v^2 - 2uv_, \cos\alpha - 2vv'' \cos\beta,$$

remplaçant $v_,$ par sa valeur $\frac{r}{R}v$, on aura pour l'expres-

sion générale de la quantité d'action à recueillir

$$Fv = M\left(\frac{Vr}{R}\cos\alpha + v''\cos\beta - v\right)v.$$

Pour que la quantité d'action recueillie soit égale à la puissance absolue du moteur, il est nécessaire que la vitesse absolue de l'eau à la sortie de la roue soit nulle, ce qui donne $u' = o$ ou

$$V^2 + 2v^2 = 2v\left(V\frac{r}{R}\cos\alpha + v''\cos\beta\right).$$

Lorsque le dernier élément de l'aube est tangent à la circonférence extérieure de la roue, on a

$$u'^2 = (v - v'')^2 = o \text{ ou } v = v'' \text{ et } V^2 = 2uv,\cos\alpha = 2V\frac{r}{R}v\cos\alpha,$$

ce qui donne pour la vitesse que prendra la turbine $v = \frac{VR}{2r\cos\alpha}$ et pour l'effort qu'elle pourra exercer $F = \frac{MVr\cos\alpha}{R}$. Cet effort sera le plus grand possible lorsque l'on pourra avoir $\cos\alpha = 1$ ou $\alpha = o$, c'est-à-dire que l'effort aura sa valeur maxima, lorsque l'eau entrera dans la roue tangentiellement à sa circonférence intérieure.

Pour des chutes de même hauteur l'effort et la vitesse resteront les mêmes tant que le rapport $\frac{R}{r}$ restera constant.

La vitesse relative de sortie $v''$ devant être égale et directement opposée à $v$, il est nécessaire, pour satisfaire à cette condition, que le dernier élément de

l'aube soit tangent à la circonférence extérieure de la roue.

Pour qu'il n'y ait point de choc au point d'entrée de l'eau sur la roue, il est nécessaire que le premier élément des aubes ou le dernier élément des courbes du cylindre soit dirigé suivant la vitesse $v'$, et comme on a $v'=v_{,}$ et $u=2v_{,}\cos\alpha$, il en résulte que la vitesse $u$ est la résultante de deux vitesses égales $v'$ et $v_{,}$, et que la vitesse $v'$ doit faire un angle égal à $2\alpha$ avec la circonférence intérieure de la roue; si l'angle $\alpha$ est de 45° le premier élément de l'aube doit être dirigé suivant le rayon.

Nous venons de voir que le premier élément des aubes doit suivre la direction de la résultante de la vitesse d'arrivée et de celle de la roue; mais cette dernière vitesse pouvant varier du simple au double, pour que cette variation ne nuise pas à la quantité d'action recueillie, on prend un terme moyen en donnant au premier élément la direction du rayon, et en faisant faire aux courbes directrices du cylindre un angle d'environ 30° avec la circonférence intérieure de la roue.

Pour que l'eau sorte sans vitesse absolue, elle devrait s'échapper dans une direction tangentielle à la circonférence extérieure de la roue; mais alors l'écoulement ne serait pas facile; on évite cet inconvénient en donnant au dernier élément de l'aube une direction qui fait un angle de 10 à 14° avec la circonférence extérieure.

Entre les deux éléments extrêmes on donne à l'aube une courbure continue et sans inflexion.

Le volume d'eau que débite le moteur dans chaque seconde étant Q, si $h$ est la hauteur de la turbine, $2\pi r$ étant sa circonférence intérieure, $2\pi rh$ sera l'aire de la section par laquelle l'eau s'écoule, en admettant toutefois que les aubes soit assez minces pour que l'on puisse ne pas avoir égard à la réduction qui résulte de leur épaisseur; la composante de la vitesse $u$ perpendiculaire à cette section sera $u\sin\alpha$, on devra donc avoir $Q = 2\pi rhu\sin\alpha = 2\pi rh\sin\alpha\sqrt{2gH}$.

La vitesse de sortie par la section normale doit donner un produit égal à celui de la vitesse d'entrée par la section normale, et égal à Q, ainsi que cela résulte de l'incompressibilité du liquide et de la permanence du mouvement; or, la composante de la vitesse de sortie $v''$, dirigée suivant le rayon, étant $v''\sin\beta$, on doit avoir $Q = 2\pi Rhv''\sin\beta$; comme la vitesse $v''$ doit être égale à la vitesse $v$ et que dans le cas où la quantité d'action recueillie est égale à la quantité d'action que développe le moteur, on doit avoir $v = \frac{uR}{2r\cos\alpha}$, il faut en conclure que

$$2\pi rhu\sin\alpha = 2\pi Rhv''\sin\beta = \frac{2\pi R^2 u\sin\beta}{2r\cos\alpha},$$

d'où
$$\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin\beta} = \left(\frac{R}{r}\right)^2.$$

Une turbine étant donnée, on connaît les angles $\alpha$ et $\beta$ des éléments extrêmes de l'aube avec les deux

circonférences de la roue ; cela suffit, lorsque la hauteur de la chute est connue, pour déterminer la vitesse des points de la circonférence extérieure de la roue, en effet nous venons de trouver $\frac{\sin 2\alpha}{\sin\beta}=\left(\frac{R}{r}\right)^2$, on a d'ailleurs $\frac{v}{v_{,}}=\frac{R}{r}$, $V^2=2uv_{,}\cos\alpha$ et $u=V$, d'où

$$v_{,}=\frac{V}{2\cos\alpha},\ v=\frac{RV}{2r\cos\alpha}=\frac{V}{2\cos\alpha}\sqrt{\frac{\sin 2\alpha}{\sin\beta}}.$$

Nous avons admis que l'on avait $u=V$, mais les contractions empêcheront fréquemment cette égalité d'avoir lieu ; cependant comme on devra avoir $2uv\cos\alpha=V^2$, on en conclura

$$u=\frac{V^2}{2\cos\alpha}\times\frac{R}{vr}=V\frac{R}{r}\times\sqrt{\frac{\sin\beta}{\sin 2\alpha}}.$$

Lorsqu'il s'agit d'établir une turbine, il faut remarquer que cette roue devant présenter un débouché suffisant au volume d'eau Q qui arrive avec la vitesse V on doit d'abord avoir $Q=2\pi rhV$, ce qui établit une relation entre le rayon intérieur $r$ de cette turbine et son épaisseur $h$, lorsque l'on peut faire abstraction de l'épaisseur des aubes.

M. Fourmeyron prend ordinairement $h=\frac{2r}{7}$, ce qui donne

$$Q=\frac{4\pi r^2}{7}\sqrt{2gH},\ \text{d'où}\ r=\sqrt{\frac{7}{4\pi\sqrt{2g}}\times\frac{Q}{\sqrt{H}}}=\sqrt{\frac{Q}{8\sqrt{H}}};$$

mais, dans la pratique, pour avoir égard aux effets des contractions et étranglements que le liquide éprouve

dans le cylindre et à l'entrée de la turbine, on prend $r = \sqrt{\frac{2}{3} \times \frac{Q}{\sqrt{H}}}$. Dans les turbines exécutées, le rayon $r$ varie de $0^m.25$ à $1^m.25$. Quant au rayon de la circonférence extérieure R, on le fait égal au moins à $1.20r$, et au plus à $1.50r$.

Le nombre des aubes augmente avec le rayon, il est de 36 pour les plus grandes roues et de 9 pour les plus petites.

Le nombre des courbes directrices varie du tiers à la moitié de celui des aubes.

Lorsque la vanne n'est levée que sur une partie de la hauteur de la roue, comme cela a lieu pendant les sécheresses, époque où le débit du courant est moindre, alors la direction de la vitesse n'étant plus horizontale, le liquide perd une partie de sa force vive en tourbillonnements causés par le changement brusque de section, et la quantité d'action recueillie en est sensiblement réduite ; on diminue cet inconvénient par un ou deux diaphragmes en tôle qui divisent la turbine en deux ou trois étages, dans le sens de la hauteur.

Nous terminerons ici la théorie générale que nous avons cru devoir exposer sur la quantité d'action que ces roues peuvent recueillir. N'ayant pas les loisirs nécessaires pour entrer dans tous les détails relatifs à l'établissement et à la construction de ces roues, nous engagerons les personnes qui désireraient acquérir les connaissances spéciales pour établir ce

genre de récepteurs, à consulter le traité d'hydraulique de M. d'Aubuisson, et celui de M. (Arthur) Morin, membre de l'Institut, lesquels renferment sur l'établissement des roues hydrauliques tout ce qu'il peut être utile à un ingénieur de connaître.

FIN DE LA PREMIÈRE DIVISION DE L'HYDRAULIQUE.

# APPENDICE.

## N° I.

**Détermination de la valeur du coefficient $a$ qui entre dans l'équation du mouvement uniforme des courants découverts.**

Pour déterminer la valeur numérique du coefficient $a$ de l'équation $RI = ah$, et en vérifier la constance, nous avons calculé le rapport $\frac{RI}{h}$ pour les quatre-vingt-dix-neuf expériences dont les résultats se trouvent dans le recueil de cinq tables publiées par de Prony, et nous avons trouvé que ce rapport était sensiblement constant et égal à 0.007848; pour vérifier ce premier travail, nous avons ensuite déterminé, par la valeur numérique de $a$, la vitesse qui correspond à chaque expérience; calcul facile puisque le produit RI, divisé par $a$ ou par 0.007848, doit donner la hauteur due à la vitesse, et nous présentons, dans le tableau suivant, pour toutes les expériences dont Prony a fait connaître les résultats, les vitesses observées, puis les vitesses calculées :

1° Par la formule $RI = 0.007848h$, dont nous proposons de faire usage;

2° Par la formule de Prony;

3° Par la formule d'Eytelwein.

Comme les expériences se rapportent à des courants dont le débit varie de 6 litres à 4,739,000 litres par seconde, la comparaison des divers résultats que nous avons obtenus mettra hors de doute la constance du rapport ou du coefficient $a$, et l'exactitude de la relation si simple $RI = ah$.

Les différences entre les vitesses observées et les vitesses calculées ne varient généralement, en plus ou en moins, que de quantités moindres que $\frac{1}{20}$; cependant, quelques différences s'élèvent jusqu'au douzième, et une seule jusqu'au sixième; mais alors les formules de Prony et d'Eytelwein donnent des différences au moins aussi fortes qui semblent provenir d'un défaut de précision dans les observations, principalement dans les mesures relatives à la pente et probablement aussi de la non uniformité du mouvement des courants sur lesquels on a expérimenté.

| Numéros d'ordre des expériences. | Noms des observateurs | Quantités mesurées. | | | | Quantités calculées. | | | | Résultats comparatifs. | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Aires des sections $\omega$ | Périmètres mouillés $\chi$ | Vitesses observées $u$ | Déclivité ou pente par mètre $I$ | Rayons moyens $R$ | Hauteurs dues à la vitesse $h$ | Valeur du produit $1000RI$ | Valeur du rapport $\frac{1000RI}{h} = 1000a$. | Vitesses calculées, $1000a$ étant égal à 7.848 | Différence avec les vitesses observées. | Vitesses calculées par la formule de Prony. | Différence avec les vitesses observées. | Vitesses calculées par la formule d'Eytelwein. | Différence avec les vitesses observées. |
| 1 | Bonati. | 3734m5601 | 527m20 | 1.269 | 0.0000996 | 7.080 | 0.08209 | 0.7052 | 8.590 | 1.328 | +0.059 | 1.440 | +0.171 | 1.356 | +0.087 |
| 2 | Brünings. | 2601.7860 | 524.05 | 1.304 | 0.0001321 | 4.965 | 0.08658 | 0.6559 | 7.575 | 1.282 | —0.022 | 1.386 | +0.082 | 1.306 | +0.002 |
| 3 | Bonati. | 2299.6967 | 615.57 | 0.736 | 0.0000611 | 3.736 | 0.02761 | 0.2283 | 8.268 | 0.757 | +0.021 | 0.790 | +0.054 | 0.758 | +0.022 |
| 4 | Ecole des ponts et chaussées. | 1899.1400 | 407.00 | 1.146 | 0.0000996 | 4.715 | 0.06695 | 0.4696 | 7.014 | 1.085 | —0.061 | 1.130 | —0.016 | 1.095 | —0.051 |
| 5 | Brünings. | 1884.2322 | 369.03 | 1.210 | 0.0001105 | 5.106 | 0.07463 | 0.5642 | 7.560 | 1.187 | —0.023 | 1.281 | +0.071 | 1.210 | 0.000 |
| 6 | Bonati. | 1617.4079 | 612.09 | 0.687 | 0.0000611 | 2.640 | 0.02399 | 0.1613 | 6.710 | 0.635 | —0.052 | 0.654 | —0.033 | 0 632 | —0.056 |
| 7 | Brünings. | 1540.0777 | 514.32 | 1.092 | 0.0001321 | 2.994 | 0.06034 | 0.3956 | 6.556 | 0.995 | —0.097 | 1.061 | —0.031 | 1.007 | —0.085 |
| 8 | Id. | 1250.8700 | 329.80 | 0.918 | 0.0001105 | 3.793 | 0.04295 | 0.4191 | 9.734 | 1.023 | +0.105 | 1.093 | +0.175 | 1.038 | +0.120 |
| 9 | Id. | 1243.6816 | 240.06 | 1.299 | 0.0001256 | 5.181 | 0.08602 | 0.6507 | 7.564 | 1.275 | —0.024 | 1.380 | +0.081 | 1.302 | +0.003 |
| 10 | Id. | 1115.4731 | 313.49 | 1.293 | 0.0001256 | 3.558 | 0.08522 | 0.4469 | 5.244 | 1.057 | —0.236 | 1.132 | —0.161 | 1.047 | —0.246 |
| | | | | | | | | | 74.751 | | | | | | |
| 11 | Funck. | 730.1583 | 180.43 | 1.417 | 0.0001915 | 4.047 | 0.10236 | 0.7749 | 7.570 | 1.391 | —0.026 | 1.512 | +0.095 | 1.423 | +0.006 |
| 12 | Brünings. | 708.0025 | 186.08 | 1.474 | 0 0002201 | 3.805 | 0.11075 | 0.8374 | 7.561 | 1.446 | —0.028 | 1.575 | +0.101 | 1.572 | +0.098 |
| 13 | Id. | 690.9670 | 186.71 | 1.218 | 0.0001256 | 3.701 | 0.07562 | 0.4648 | 6.146 | 1.079 | —0.139 | 1.156 | —0.062 | 1.095 | —0.123 |
| 14 | Funck. | 627.5521 | 201.74 | 1.575 | 0.0003076 | 3.111 | 0.12644 | 0.9568 | 7.567 | 1.546 | —0.029 | 1.688 | +0.113 | 1.585 | +0.010 |
| 15 | Id. | 625.1297 | 145.10 | 1.735 | 0.0002494 | 4.308 | 0.15399 | 1.0745 | 6.977 | 1.641 | —0.094 | 1.793 | +0.058 | 1.681 | —0.054 |
| 16 | Id. | 616.3260 | 179.18 | 2.119 | 0.0005032 | 3.440 | 0.22888 | 1.7309 | 7.562 | 2.079 | —0.040 | 2.295 | +0.176 | 2.143 | +0.024 |
| 17 | Id. | 592.3981 | 145.60 | 2.409 | 0.0005503 | 4.069 | 0.29582 | 2.2389 | 7.274 | 2.365 | —0.044 | 2.620 | +0.211 | 2.442 | +0.033 |
| 18 | Id. | 578.6123 | 177.61 | 2.101 | 0.0005032 | 3.258 | 0.21501 | 1.6893 | 7.624 | 2.023 | —0.078 | 2.231 | +0.130 | 2.085 | —0.016 |
| 19 | Brünings. | 566.4021 | 181.06 | 0.938 | 0.0001256 | 3.128 | 0.04485 | 0.3929 | 8.760 | 0.990 | +0.052 | 1.057 | +0.119 | 1.004 | +0.066 |
| 20 | Funck. | 547.1510 | 141.68 | 1.663 | 0.0002494 | 3.862 | 0.14098 | 0.9631 | 6.831 | 1.553 | —0.110 | 1.694 | +0.031 | 1.590 | —0.073 |
| | [redacted] | | | | | | | | 147.904 | | | | | | |

| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] | 2.400 | —0.010 |
| 21 | Funck. | 544.7385 | 138 51 | 2.416 | 0.0005503 | 3.933 | 0.29754 | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] | 2.039 | —0.001 |
| 22 | Id. | 531.6419 | 170.39 | 2.040 | 0.0005032 | 3.120 | 0.21214 | 1.5700 | 7.400 | 1.980 | —0.060 | 2.182 | +0.142 | 2.039 | —0.001 |
| 23 | Id. | 507.1228 | 159.10 | 2.008 | 0.0005032 | 3.187 | 0.20554 | 1.6040 | 7.804 | 2.002 | —0.006 | 2.207 | +0.199 | 2.062 | +0.054 |
| 24 | Id. | 494.4794 | 130.07 | 1.608 | 0.0002494 | 3.802 | 0.13180 | 0.9431 | 7.193 | 1.539 | —0.069 | 1.680 | +0.072 | 1.578 | —0.030 |
| 25 | Id. | 491.4659 | 199.58 | 1.467 | 0.0003076 | 2.462 | 0.10970 | 0.7575 | 6.905 | 1.378 | —0.089 | 1.495 | +0.028 | 1.390 | —0.077 |
| 26 | Id. | 477.0892 | 133.77 | 2.294 | 0 0005503 | 3.566 | 0.26828 | 1.9626 | 7.315 | 2.214 | —0.080 | 2.448 | +0.154 | 2.284 | —0.010 |
| 27 | Id. | 474.4307 | 128.88 | 1.597 | 0.0002494 | 3.681 | 0.13001 | 0.9181 | 7.061 | 1.517 | —0.080 | 1.653 | +0.056 | 1.552 | —0.045 |
| 28 | Brünings. | 473.6428 | 227.19 | 1.274 | 0.0001717 | 2.085 | 0.08274 | 0.3580 | 4.326 | 0.947 | —0.327 | 1.015 | —0.259 | 0.957 | +0.317 |
| 29 | Id. | 447.2527 | 169.45 | 1.122 | 0.0002201 | 2.639 | 0.06417 | 0.5809 | 9.208 | 1.204 | +0.082 | 1.300 | +0.178 | 1.228 | +0.106 |
| 30 | Id. | 435.1409 | 185.14 | 0.975 | 0.0001717 | 2.350 | 0.04849 | 0.4035 | 8.321 | 1.004 | +0.029 | 1.072 | +0.097 | 1.019 | +0.045 |
| | | | | | | | | | 220.711 | | | | | | | |
| 31 | Funck. | 418.4993 | 159.41 | 1.869 | 0.0005032 | 2.625 | 0.17807 | 1.3210 | 7.418 | 1.816 | —0.053 | 1.996 | +0.127 | 1.868 | —0.001 |
| 32 | Id. | 416.2345 | 122.05 | 1.506 | 0.0002494 | 3.412 | 0.11561 | 0 8508 | 7.359 | 1.459 | —0.047 | 1.588 | +0.082 | 1.498 | +0.013 |
| 33 | Id. | 388.5643 | 121.13 | 1.450 | 0.0002494 | 3.208 | 0.10717 | 0.8000 | 7.464 | 1.414 | —0.036 | 1.538 | +0.088 | 1.446 | —0.004 |
| 34 | Id. | 387.0873 | 155.96 | 1.820 | 0.0005032 | 2.482 | 0.16885 | 1.2489 | 7.396 | 1.766 | —0.054 | 1.939 | +0.119 | 1.815 | —0.005 |
| 35 | Id. | 371.9229 | 125.58 | 2.035 | 0.0005503 | 2.962 | 0.21110 | 1.6297 | 7.720 | 2.017 | —0.018 | 2.225 | +0.190 | 2.078 | +0.043 |
| 36 | Id. | 364.3406 | 119.71 | 1.337 | 0.0002494 | 3.043 | 0.09194 | 0.7590 | 8.255 | 1.377 | +0.040 | 1.496 | +0.159 | 1.408 | +0.071 |
| 37 | Id. | 352.8688 | 124.36 | 1.993 | 0.0005503 | 2.837 | 0.20247 | 1.5613 | 7.711 | 1.975 | —0.018 | 2.176 | +0.183 | 2.034 | +0.041 |
| 38 | Id. | 351.5394 | 151.88 | 1.757 | 0.0005032 | 2.315 | 0.15736 | 1.1647 | 7.401 | 1.706 | —0.051 | 1.870 | +0.113 | 1.752 | —0.005 |
| 39 | Id. | 336.6704 | 117.05 | 1.239 | 0.0002494 | 2.876 | 0.07826 | 0.7174 | 9.166 | 1.338 | +0.099 | 1.463 | +0.224 | 1.368 | +0.129 |
| 40 | Id. | 333.1748 | 122.38 | 1.919 | 0.0005503 | 2.722 | 0.18772 | 1.4980 | 7 927 | 1.934 | +0.015 | 2.130 | +0.211 | 1.951 | +0.032 |
| | | | | | | | | | 298.523 | | | | | | | |
| 41 | Funck. | 304.3721 | 114.85 | 1.057 | 0.0002494 | 2.650 | 0.05696 | 0.6609 | 11.602 | 1.285 | +0.228 | 1.353 | +0.296 | 1.312 | +0.215 | |
| 42 | Brünings. | 304.0761 | 108.89 | 1.039 | 0.0001492 | 2.792 | 0.05503 | 0.4166 | 7.574 | 1.020 | —0.019 | 1.091 | +0.052 | 1.034 | —0.005 | |
| 43 | Funck. | 296.0022 | 145.60 | 1.600 | 0.0005032 | 2.033 | 0.13050 | 1.0230 | 7.839 | 1.598 | —0.002 | 1.748 | +0.148 | 1.640 | +0.040 | |
| 44 | Brünings. | 283.1025 | 99.16 | 1.225 | 0.0002028 | 2.855 | 0.07649 | 0.5790 | 7.569 | 1.203 | —0.022 | 1.297 | +0.072 | 1.225 | 0.000 | |
| 45 | Funck. | 277.5881 | 126.12 | 1.011 | 0.0001915 | 2.201 | 0.05210 | 0.4215 | 8.090 | 1.026 | +0.015 | 1.098 | +0.087 | 1.036 | +0.025 | |
| 46 | Id. | 265.5747 | 141.84 | 1.490 | 0.0005032 | 1.872 | 0.11317 | 0.9422 | 8.325 | 1.534 | +0.044 | 1.675 | +0.185 | 1.481 | —0.009 | |
| 47 | Id. | 250.1641 | 110.61 | 1.626 | 0.0005503 | 2.262 | 0.13477 | 1.2445 | 9.234 | 1.763 | +0.137 | 1.935 | +0.309 | 1.812 | +0.186 | |
| 48 | Id. | 221.2631 | 136.19 | 1.226 | 0.0005032 | 1.625 | 0.07661 | 0.8175 | 10.671 | 1.428 | +0.202 | 1.555 | +0.329 | 1.463 | +0.237 | |
| 49 | Ecole des ponts-et-chaussées. | 218.7790 | 76.72 | 1.115 | 0.0001306 | 2.852 | 0.06338 | 0.3725 | 5.877 | 0.964 | —0.151 | 1.010 | —0.105 | 0.977 | —0.138 | |
| 50 | Funck. | 217.3745 | 105 53 | 1.509 | 0.0005503 | 2.060 | 0.11607 | 1.1335 | 9.765 | 1.682 | +0.173 | 1.844 | +0.335 | 1.728 | +0.219 | |
| | *A reporter..* | ..... | ..... | ..... | ..... | ..... | ..... | ..... | 385.074 | | | | | | | |

| Numéros d'ordre des expériences. | Noms des observateurs | Quantités mesurées. | | | | Quantités calculées. | | | | Résultats comparatifs. | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Aires des sections $\omega$ | Périmètres mouillés $\chi$ | Vitesses observées $u$ | Déclivité ou pente par mètre I | Rayons moyens R | Hauteurs dues à la vitesse $h$ | Valeur du produit 1000RI | Valeur du rapport $\frac{1000RI}{h} = 1000c$. | Vitesses calculées, 1000c étant égal à 7.848 | Différence avec les vitesses observées. | Vitesses calculées par la formule de Prony. | Différence avec les vitesses observées. | Vitesses calculées par la formule d'Eytelwein. | Différence avec les vitesses observées. |
| | *Report* .... | ..... | ..... | ..... | ..... | ..... | ..... | ..... | 385.074 | | | | | | |
| 51 | Brünings. | 205.7047 | 92.88 | 0.917 | 0.0001492 | 2.215 | 0.04286 | 0.3304 | 7.709 | 0.908 | —0.009 | 0.964 | +0.047 | 0.923 | +0.006 |
| 52 | Funck. | 185.8137 | 116.42 | 1.502 | 0.0004500 | 1.596 | 0.11499 | 0.7182 | 6.245 | 1.339 | —0.163 | 1.454 | —0.048 | 1.369 | —0.133 |
| 53 | Id. | 179.0192 | 130.54 | 1.035 | 0.0005032 | 1.371 | 0.05461 | 0.6901 | 10.805 | 1.318 | +0.278 | 1.423 | +0.388 | 1.341 | +0.306 |
| 54 | Brünings. | 114.3242 | 91.00 | 0.771 | 0.0002028 | 1.256 | 0.03030 | 0.2548 | 8.409 | 0.798 | +0.027 | 0.839 | +0.068 | 0.802 | +0.031 |
| 55 | Funck. | 76.5115 | 111.71 | 0.772 | 0.0004500 | 0.685 | 0.03038 | 0.3083 | 10.148 | 0.878 | +0.106 | 0.929 | +0.157 | 0.885 | +0.113 |
| 56 | Dubuat. | 28.4527 | 16.27 | 0.860 | 0.0001559 | 1.749 | 0.03770 | 0.2726 | 7.230 | 0.824 | —0·036 | 0.870 | +0.010 | 0.831 | —0 029 |
| 57 | Id. | 29.0395 | 16.35 | 0.432 | 0.0000279 | 1.776 | 0.00952 | 0.0496 | 5.210 | 0.352 | —0.080 | 0.336 | —0.096 | 0.337 | —0.095 |
| 58 | Id. | 23.0754 | 15.40 | 0.950 | 0.0001653 | 1.498 | 0.04600 | 0.2476 | 5.382 | 0.796 | —0.154 | 0.826 | —0.124 | 0.791 | —0.159 |
| 59 | Id. | 22.6410 | 15.38 | 0.368 | 0.0000303 | 1.472 | 0.00691 | 0.0446 | 6.454 | 0 334 | —0.034 | 0.315 | —0.053 | 0.318 | —0.050 |
| 60 | Id. | 11.9062 | 10.88 | 0.472 | 0.0001121 | 1.094 | 0.01135 | 0.1226 | 10.801 | 0.553 | +0.081 | 0.562 | +0.090 | 0.547 | +0.075 |
| | | | | | | | | | 463.467 | | | | | | |
| 61 | Dubuat. | 8.7216 | 9.91 | 0.329 | 0.0000868 | 0.880 | 0.00552 | 0.0764 | 13.840 | 0.439 | +0.110 | 0.430 | +0.101 | 0.425 | +0.096 |
| 62 | Id. | 7.6740 | 9.74 | 0.426 | 0.0000651 | 0.787 | 0.00925 | 0.0513 | 5.546 | 0.359 | —0.067 | 0.341 | —0.085 | 0.343 | —0.083 |
| 63 | Id. | 5.7568 | 9.20 | 0.260 | 0.0000458 | 0.625 | 0.00345 | 0.0286 | 8.289 | 0.267 | +0.007 | 0.241 | —0.019 | 0.249 | —0.011 |
| 64 | Id. | 5.4037 | 9.12 | 0.211 | 0.0000362 | 0.592 | 0.00227 | 0.0214 | 9.427 | 0.231 | +0.020 | 0.201 | —0.010 | 0.211 | 0.000 |
| 65 | Id. | 4.4872 | 8.77 | 0.197 | 0.0000362 | 0.512 | 0.00196 | 0.0185 | 9.438 | 0.215 | +0.018 | 0.179 | —0.017 | 0·194 | —0.003 |
| 66 | Woltemann. | 2.8092 | 5.19 | 0.281 | 0.0000666 | 0.541 | 0.00403 | 0.0361 | 8.927 | 0.300 | +0.019 | 0.277 | —0.004 | 0.282 | +0.001 |
| 67 | Id. | 2.2260 | 4.81 | 0.281 | 0.0000858 | 0.462 | 0.00403 | 0.0397 | 9 851 | 0.315 | +0.034 | 0.293 | +0.012 | 0.298 | +0.017 |
| 68 | Id. | 0.9840 | 3.15 | 0.430 | 0.0002083 | 0.312 | 0.00943 | 0.0650 | 6.893 | 0.403 | —0.027 | 0.392 | —0.038 | 0 390 | —0.040 |
| 69 | Id. | 0.5802 | 2.87 | 0.320 | 0.0002187 | 0.202 | 0.00522 | 0.0443 | 8.487 | 0.333 | +0.013 | 0.313 | —0.007 | 0.316 | —0.004 |
| 70 | Dubuat. | 0.1137 | 0.95 | 0.154 | 0.0001077 | 0.119 | 0.00121 | 0.0128 | 10.578 | 0.178 | +0.024 | 0.144 | —0.010 | 0.157 | +0.003 |
| | | | | | | | | | 554.743 | | | | | | |

| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 71 | Dubuat. | 0.0991 | 0.89 | 0.880 | 0.0023148 | 0.111 | 0.03947 | 0.2566 | 6.501 | 0.801 | −0.079 | 0.842 | −0.038 | 0.806 | −0.074 |
| 72 | Id. | 0.0958 | 0.88 | 0.863 | 0.0023148 | 0.109 | 0.03796 | 0.2522 | 6.643 | 0.793 | −0.070 | 0.834 | −0.029 | 0.798 | −0.065 |
| 73 | Id. | 0.0924 | 0.86 | 0.855 | 0.0023148 | 0.107 | 0.03726 | 0.2478 | 6.650 | 0.787 | −0.068 | 0.826 | −0.029 | 0.791 | −0.064 |
| 74 | Id. | 0.0876 | 0.84 | 0.816 | 0.0023148 | 0.104 | 0.03394 | 0.2412 | 7.106 | 0.776 | −0.040 | 0.814 | −0.002 | 0.780 | −0.036 |
| 75 | Id. | 0.0775 | 0.80 | 0.421 | 0.0007082 | 0.098 | 0.00903 | 0.0695 | 7.696 | 0.417 | −0.004 | 0.401 | −0.020 | 0.404 | −0.017 |
| 76 | Id. | 0.0738 | 0.77 | 0.772 | 0.0023148 | 0.096 | 0.03038 | 0.2212 | 7.281 | 0.743 | −0.029 | 0.777 | +0.005 | 0.745 | −0.027 |
| 77 | Id. | 0.0723 | 0.76 | 0.766 | 0.0023148 | 0.095 | 0.02991 | 0.2190 | 7.322 | 0.739 | −0.027 | 0.773 | +0.007 | 0.741 | −0.025 |
| 78 | Id. | 0.0632 | 0.74 | 0.766 | 0.0021834 | 0.086 | 0.02991 | 0.1870 | 6.252 | 0.684 | −0.082 | 0.709 | −0.057 | 0.683 | −0.083 |
| 79 | Id. | 0.0611 | 0.70 | 0.735 | 0.0024271 | 0.087 | 0.02753 | 0.2108 | 7.657 | 0.726 | −0.009 | 0.757 | +0.022 | 0.727 | −0.008 |
| 80 | Id. | 0.0558 | 0.71 | 0.384 | 0.0007082 | 0.079 | 0.00752 | 0.0568 | 7 447 | 0.374 | −0.010 | 0.360 | −0.024 | 0.360 | −0.024 |
| | | | | | | | | | 625.298 | | | | | | |
| 81 | Dubuat. | 0.0505 | 0.68 | 0.124 | 0.0001077 | 0.074 | 0.00078 | 0.0080 | 10.256 | 0.140 | +0.016 | 0.104 | −0.020 | 0.118 | −0.017 |
| 82 | Id. | 0.0413 | 0.58 | 0.637 | 0.0023419 | 0.070 | 0.02069 | 0.1664 | 8.042 | 0.652 | +0.015 | 0.665 | +0.028 | 0.642 | +0.041 |
| 83 | Id. | 0.0379 | 0.63 | 0.327 | 0.0007082 | 0.060 | 0.00545 | 0.0427 | 7.818 | 0.327 | 0.000 | 0.306 | −0.021 | 0.310 | −0.017 |
| 84 | Id. | 0.0371 | 0.80 | 0.783 | 0.0047169 | 0.046 | 0.03125 | 0.2190 | 7.008 | 0.740 | −0.043 | 0.773 | −0.010 | 0.742 | −0.055 |
| 85 | Id. | 0.0369 | 0.55 | 0.606 | 0.0023419 | 0.067 | 0.01872 | 0.1569 | 8.381 | 0.624 | +0.018 | 0.644 | +0.038 | 0.623 | +0.032 |
| 86 | Id. | 0.0308 | 0.51 | 0.334 | 0.0005787 | 0.061 | 0.00568 | 0.0352 | 6.197 | 0.295 | −0.039 | 0.273 | −0.061 | 0.279 | −0.002 |
| 87 | Id. | 0.0288 | 0.49 | 0.549 | 0.0023419 | 0.059 | 0.01536 | 0.1376 | 9.609 | 0 585 | +0.036 | 0.599 | +0.050 | 0.581 | +0.042 |
| 88 | Bidone. | 0.0276 | 0.49 | 1.692 | 0.0194510 | 0.056 | 0.14593 | 1.0849 | 7.427 | 1.646 | −0.046 | 1.802 | +0.110 | 1.690 | −0.014 |
| 89 | Dubuat. | 0.0269 | 0.47 | 0.310 | 0.0005787 | 0.057 | 0.00490 | 0.0328 | 6.697 | 0.284 | −0.026 | 0.261 | −0 049 | 0.268 | −0.042 |
| 90 | Id. | 0.0258 | 0.58 | 0.249 | 0.0007082 | 0.045 | 0.00317 | 0.0316 | 9.968 | 0.280 | +0.031 | 0.256 | +0.007 | 0.263 | +0.068 |
| | | | | | | | | | 706.701 | | | | | | |
| 91 | Funck. | 0.0256 | 0.88 | 0.633 | 0.0108342 | 0.029 | 0.02042 | 0.3157 | 15.460 | 0.888 | +0.245 | 0.941 | +0.308 | 0.896 | +0.263 |
| 92 | Dubuat. | 0.0253 | 0.57 | 0.548 | 0.0021834 | 0 044 | 0.01331 | 0.0959 | 6.264 | 0.490 | −0.058 | 0.490 | −0.058 | 0.480 | −0.068 |
| 93 | Id. | 0.0253 | 0.57 | 0.367 | 0.0010764 | 0.044 | 0.00687 | 0.0473 | 6.885 | 0.344 | −0.023 | 0.326 | −0.041 | 0.329 | −0.038 |
| 94 | Id. | 0.0252 | 0.46 | 0.263 | 0.0005787 | 0.055 | 0.00353 | 0.0317 | 8.980 | 0.282 | +0.019 | 0.256 | −0.007 | 0.263 | 0.000 |
| 95 | Bidone. | 0.0222 | 0.46 | 1.586 | 0.0194510 | 0.048 | 0.12822 | 0.9343 | 7.286 | 1.527 | −0.059 | 1.668 | +0.082 | 1.566 | −0.020 |
| 96 | Dubuat. | 0.0199 | 0.41 | 0.495 | 0.0023419 | 0.048 | 0.01249 | 0.1126 | 9.015 | 0.530 | +0.035 | 0.536 | +0.041 | 0.528 | +0.028 |
| 97 | Id. | 0.0153 | 0.37 | 0.242 | 0.0005787 | 0.041 | 0.00299 | 0.0239 | 7.993 | 0.244 | +0.002 | 0.216 | −0.026 | 0.225 | −0.017 |
| 98 | Bidone. | 0.0152 | 0.42 | 1.366 | 0.0194510 | 0.036 | 0.09512 | 0.7066 | 7.498 | 1.328 | −0.038 | 1.441 | +0.075 | 1.358 | −0.008 |
| 99 | Dubuat. | 0.0138 | 0.35 | 0.740 | 0.0047169 | 0.039 | 0.02829 | 0.1841 | 6.507 | 0.678 | −0.067 | 0.703 | −0.042 | 0.677 | −0.068 |
| | | | | | | | | | 782.519 | | | | | | |

Si, de la somme totale des valeurs du rapport $1000\frac{RI}{h}=1000a$ qui est 782.519, on retranche les quatre plus petites, qui correspondent aux numéros 10, 28, 49 et 58, et les qnatre plus grandes qui correspondent aux numéros 41, 48, 50 et 91, valeurs qui forment une somme de 68.327, il restera 714.192 pour la somme des 91 autres valeurs de $1000a$, ce qui donne, pour la moyenne de ces valeurs, 7.848, et pour la valeur du coefficient qui entre dans l'équation du mouvement uniforme $a=0.00785$. La formule $RI=0.00785h$ donne des valeurs, pour la vitesse, au moins aussi exactes que celles obtenues par la formule de Prony, ainsi qu'on peut le reconnaître par les résultats suivants :

| N° des expériences. | Différences entre les vitesses observées et les vitesses calculées par la formule | | Différences secondes. | N° des expériences. | Différences entre les vitesses observées et les vitesses calculées par la formule | | Différences secondes. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | de Prony. | proposée. | | | de Prony. | proposée. | |
| 53 | +0.388 | +0.278 | —0.110 | 35 | +0.190 | —0.018 | —0.182 |
| 50 | +0.335 | +0.173 | —0.162 | 46 | +0.185 | +0.044 | —0.141 |
| 48 | +0.329 | +0.202 | —0.127 | 37 | +0.183 | —0.018 | —0.165 |
| 47 | +0.309 | +0.137 | —0.172 | 29 | +0.178 | +0.082 | —0.096 |
| 91 | +0.308 | +0.245 | —0.063 | 16 | +0.176 | —0.040 | —0.136 |
| 41 | +0.296 | +0.228 | —0.068 | 8 | +0.175 | +0.105 | —0.070 |
| 17 | +0.211 | —0.044 | —0.167 | 1 | +0.171 | +0.059 | —0.112 |
| 28 | —0.259 | —0.327 | +0.068 | 10 | —0.161 | —0.236 | +0.135 |
| 39 | +0.224 | +0.099 | —0.125 | 36 | +0.159 | +0.040 | —0.119 |
| 40 | +0.211 | +0.015 | —0.196 | 21 | +0.158 | +0.091 | —0.067 |
| 23 | +0.199 | —0.006 | —0.193 | | | | |

Dans une partie des applications, que nous avons eu occasion de faire, nous avons souvent pris $a=0.00783$ qui nous a paru donner des résultats encore plus précis, quoique fort peu différents de ceux obtenus avec $a=0.00785$.

## N° II.

**Détermination de la valeur numérique du coefficient $b$ qui entre dans l'équation du mouvement permanent de l'eau dans les tuyaux de conduite.**

Pour déterminer la valeur numérique du coefficient $b$ de l'équation $\frac{1}{4}Dj = bh$ et en vérfiier la constance, nous avons calculé le rapport $\frac{Dj}{4h}$ pour les cinquante-et-une expériences dont les résultats se trouvent dans le recueil des cinq tables de Prony, et nous avons trouvé que ce rapport était sensiblement constant et égal à 0.007848; pour vérifier ce premier travail, nous avons ensuite déterminé par la valeur numérique de $b$ la vitesse qui correspond à chaque expérience, calcul facile puisque le produit $\frac{1}{4}Dj$, divisé par $b$ ou par 0.007848, doit donner la hauteur due à la vitesse, et que les tables publiées par Navier et Gényès font de suite connaître la vitesse qui correspond à chaque hauteur.

Nous présentons, dans le tableau suivant, pour toutes les expériences dont Prony a fait connaître les résultats, les vitesses observées, puis les vitesses calculées :

1° Par la formule $\frac{1}{4}Dj = 0.007848h$, dont nous proposons de faire usage;

2° Par la formule de Prony $\frac{1}{4}Dj = 0.0000173u + 0.000348u^2$.

Les différences entre les vitesses observées et les vitesses calculées ne varient généralement, en plus ou en moins, que de quantités moindre que $\frac{1}{10}$; cependant quelques différences s'élèvent jusqu'au *sixième*, et une seule jusqu'au *quart;* mais alors la formule de Prony donne des différences au moins aussi fortes qui semblent provenir d'un défaut de précision dans les observations :

| Numéros d'ordre des expériences. | Noms des observateurs | Quantités mesurées. | | | | Quantités calculées. | | | | Résultats comparatifs. | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Diamètre D | Longueur $l$ | Charge H | Vitesse $u$ | Hauteurs dues à la vitesse $h$ | Rapport $\frac{H}{l}=j$ | $\frac{1000}{4}\times Dj$ | $b$ ou valeur de $1000\frac{Dj}{4h}$ | Vitesses calculées, $b$ étant égal à 0.007848 | Différence avec les vitesses observées. | Vitesses calculées par la formule de Prony. | Différence avec les vitesses observées. |
| 1 | Couplet. | 0.1353 | 2280.370 | 0.15113 | 0.0544 | 0.000143 | 0.0000663 | 0.002242 | 15.462 | 0.0689 | +0.0145 | 0.0590 | +0.0046 |
| 2 | Id. | 0.1353 | 2280.370 | 0.30678 | 0.0854 | 0.000373 | 0.0001345 | 0.004526 | 12.160 | 0.1063 | +0.0209 | 0.0918 | +0.0064 |
| 3 | Id. | 0.1353 | 2280.370 | 0.45342 | 0.1117 | 0.0007 | 0.0001988 | 0.006736 | 9.963 | 0.1300 | +0.0183 | 0.1163 | +0.0046 |
| 4 | Id. | 0.1353 | 2280.370 | 0.47072 | 0.1301 | 0.00086 | 0.0002503 | 0.008466 | 9.844 | 0.1453 | +0.0152 | 0.1262 | —0.0039 |
| 5 | Id. | 0.1353 | 2280.370 | 0.64968 | 0.1411 | 0.00101 | 0.0002853 | 0.009649 | 9.553 | 0.1553 | +0.0142 | 0.1335 | —0.0076 |
| 6 | Id. | 0.1353 | 2280.370 | 0.67675 | 0.1441 | 0.00106 | 0.0002968 | 0.010039 | 9.461 | 0.1587 | +0 0183 | 0.1467 | +0.0026 |
| 7 | Id. | 0.4873 | 1169.420 | 3.92740 | 1.0600 | 0.05728 | 0.0033584 | 0.409137 | 7.143 | 1.0126 | —0.0474 | 1.0592 | —0.0008 |
| 8 | Bossut. | 0.0361 | 58.471 | 0.32484 | 0.3400 | 0.00589 | 0.0055547 | 0.050128 | 8.510 | 0.3547 | +0.0147 | 0.3553 | +0.0153 |
| 9 | Id. | 0.0544 | 58.471 | 0.32484 | 0.4433 | 0.01002 | 0.0055547 | 0.078400 | 7.538 | 0 4431 | —0.0002 | 0.4275 | —0.0158 |
| 10 | Id. | 0.0361 | 58.471 | 0.64968 | 0.4115 | 0.01331 | 0.0111094 | 0.100262 | 7.525 | 0.5013 | —0.0102 | 0.5222 | +0.0107 |
| | | | | | | | | | 97.159 | | | | |
| 11 | Bossut. | 0.0544 | 58.471 | 0.64968 | 0.6695 | 0.02284 | 0.0111094 | 0.151085 | 6.615 | 0.6155 | —0.0540 | 0.6342 | —0.0363 |
| 12 | Id. | 0.0361 | 48.726 | 0.32484 | 0.3808 | 0.00740 | 0.0066667 | 0.060184 | 8.130 | 0.3881 | +0 0073 | 0.3915 | +0.0107 |
| 13 | Id. | 0.0544 | 48.726 | 0.32484 | 0.4955 | 0.01249 | 0.0066667 | 0.090667 | 7.267 | 0 4767 | —0.0188 | 0.4959 | —0.0004 |
| 14 | Id. | 0.0361 | 48.726 | 0.64968 | 0.5693 | 0.01652 | 0.0133333 | 0.120333 | 7.284 | 0.5591 | —0 0102 | 0.5635 | +0.0058 |
| 15 | Id. | 0.0544 | 48.726 | 0.64968 | 0.7436 | 0.02818 | 0.0133333 | 0.181332 | 6.434 | 0.6741 | —0.0695 | 0.6970 | +0.0466 |
| 16 | Id. | 0.0361 | 38.981 | 0.32484 | 0.4366 | 0.00972 | 0.0083333 | 0.075207 | 7.737 | 0.4341 | —0.0025 | 0.4406 | —0.0040 |
| 17 | Id. | 0.0544 | 38 981 | 0.32484 | 0.5605 | 0.01602 | 0.0083333 | 0.113606 | 7.091 | 0 5335 | —0.0270 | 0.5467 | —0.0138 |
| 18 | Id. | 0.0361 | 38.981 | 0.64968 | 0.6498 | 0.02142 | 0.0166670 | 0.150497 | 7.026 | 0.6147 | —0.0351 | 0 6330 | +0.0168 |
| 19 | Id. | 0.0544 | 38.981 | 0.64968 | 0.8363 | 0.03565 | 0.0166670 | 0.226634 | 6.358 | 0.7535 | —0.0828 | 0.7823 | —0 0540 |
| 20 | Id. | 0.0361 | 29.236 | 0.32484 | 0.5129 | 0.01341 | 0.0111094 | 0.100262 | 7.476 | 0.5013 | —0.0116 | 0.5222 | +0.0093 |
| | | | | | | | | | 168.577 | | | | |
| 21 | Bossut. | 0.0544 | 29.236 | 0.32484 | 0.6444 | 0.02117 | 0.0111094 | 0.151085 | 7.137 | 0.6155 | —0.0289 | 0.6342 | —0.0102 |
| 22 | Id. | 0.0361 | 29 236 | 0.64968 | 0.7600 | 0.02944 | 0.0222333 | 0.200325 | 6.804 | 0.7084 | —0.0516 | 0.7440 | —0.0160 |

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 23 | Id. | 0.0544 | 29.236 | 0.64968 | 0.9682 | 0.04778 | 0.0222330 | 0.302237 | 6.326 | 0.5752 | [illegible] | [illegible] | |
| 24 | Dubuat. | 0.0271 | 19.951 | 0.00406 | 0.0430 | 0.000095 | 0.0002040 | 0.001382 | 14.547 | 0.0586 | +0.0156 | 0.04205 | −0.00095 |
| 25 | Id. | 0.0271 | 19.951 | 0.01353 | 0.0981 | 0.000475 | 0.0006781 | 0.004458 | 10.090 | 0.1053 | +0.0072 | 0.0907 | −0.0074 |
| 26 | Id. | 0.0271 | 19.951 | 0.11369 | 0.2826 | 0.00407 | 0.0056974 | 0.038598 | 9.483 | 0.3109 | +0.0283 | 0.3078 | +0.0252 |
| 27 | Id. | 0.0271 | 19.951 | 0.11369 | 0.2889 | 0.00425 | 0.0056974 | 0.038598 | 9.082 | 0.3109 | −0.0220 | 0.3078 | +0.0189 |
| 28 | Id. | 0.0271 | 19.951 | 0.16052 | 0.3604 | 0.00661 | 0.0080462 | 0.054506 | 8.246 | 0.3694 | +0.0090 | 0.3714 | +0.0110 |
| 29 | Id. | 0.0271 | 19.951 | 0.21060 | 0.4091 | 0.00823 | 0.0105553 | 0.071365 | 8.671 | 0.4230 | +0.0139 | 0.4286 | +0.0195 |
| 30 | Id. | 0.0271 | 19.951 | 0.24255 | 0.4408 | 0.00991 | 0.0121573 | 0.082365 | 8.311 | 0.4542 | +0.0134 | 0.4619 | +0.0211 |
| | | | | | | | | | 257.274 | | | | |
| 31 | Dubuat. | 0.0271 | 19.951 | 0.24255 | 0.4500 | 0.01032 | 0.0121573 | 0.082365 | 7.981 | 0.4542 | +0.0042 | 0.4619 | +0.0119 |
| 32 | Id. | 0.0271 | 19.951 | 0.33350 | 0.5411 | 0.01492 | 0.0167159 | 0.123519 | 8.278 | 0.5568 | +0.0157 | 0.5712 | +0.0301 |
| 33 | Id. | 0.0271 | 19.951 | 0.37086 | 0.5676 | 0.01642 | 0.0185885 | 0.125936 | 7.669 | 0.5617 | +0.0059 | 0.5769 | +0.0093 |
| 34 | Id. | 0 0271 | 19.951 | 0.39522 | 0.5916 | 0.01783 | 0.0198095 | 0.134210 | 7.527 | 0.5799 | −0.0117 | 0.5963 | +0.0047 |
| 35 | Id. | 0.0271 | 19.951 | 0.64156 | 0.7761 | 0.03070 | 0.0321066 | 0.217521 | 7.085 | 0.7383 | −0.0378 | 0.7671 | −0.0090 |
| 36 | Dubuat. | 0.0361 | 19.491 | 0.32484 | 0.6324 | 0.02039 | 0.0166670 | 0.150497 | 7.381 | 0.6147 | −0.0177 | 0.6330 | +0.0006 |
| 37 | Id. | 0.0544 | 19.491 | 0.32484 | 0.7908 | 0.03187 | 0.0166670 | 0.226674 | 7.111 | 0.7535 | −0.0373 | 0.7823 | −0.0085 |
| 38 | Id. | 0.0544 | 19.491 | 0.64968 | 0.9332 | 0.04439 | 0.0333440 | 0.453342 | 10.213 | 1.0663 | +0.1331 | 1.1163 | +0.1831 |
| 39 | Id. | 0.0544 | 19.491 | 0.64968 | 1.1640 | 0.06907 | 0.0333440 | 0.453342 | 6.563 | 1.0663 | −0.0977 | 1.1163 | −0.0477 |
| 40 | Id. | 0.0271 | 16.242 | 0.10828 | 0.3309 | 0.00558 | 0.0066667 | 0.045165 | 8.094 | 0.3359 | +0.0050 | 0.3356 | +0.0047 |
| | | | | | | | | | 335.176 | | | | |
| 41 | Dubuat. | 0.0271 | 16.242 | 0.32484 | 0.6032 | 0.01835 | 0.0199998 | 0.135497 | 7.299 | 0.5824 | −0.0208 | 0.5993 | −0.0039 |
| 42 | Id. | 0.0361 | 9.745 | 0.32484 | 0.8976 | 0.04107 | 0.0333340 | 0.300839 | 7.325 | 0.8237 | −0.0739 | 0.9049 | +0.0073 |
| 43 | Id. | 0.0544 | 9.745 | 0.32484 | 1.0915 | 0.06073 | 0.0333340 | 0.453342 | 7.465 | 1.0663 | −0.0252 | 1.1163 | +0.0248 |
| 44 | Id. | 0.0361 | 9.745 | 0.64968 | 1.3138 | 0.08799 | 0.0666680 | 0.601679 | 6.838 | 1.2279 | −0.0859 | 1.2898 | −0.0240 |
| 45 | Id. | 0.0544 | 9.745 | 0.64968 | 1.5945 | 0.12960 | 0.0666680 | 0.906685 | 6.995 | 1.5068 | −0.0877 | 1.5988 | +0.0043 |
| 46 | Dubuat. | 0.0271 | 3.749 | 0.01895 | 0.2352 | 0.00282 | 0.0050546 | 0.034244 | 12.143 | 0.2926 | +0.0574 | 0.2897 | +0.0545 |
| 47 | Id. | 0.0271 | 3.749 | 0.16242 | 0.7943 | 0.03216 | 0.0433235 | 0.293517 | 9.126 | 0.8575 | +0.0632 | 0.8935 | +0.0992 |
| 48 | Id. | 0.0271 | 3.749 | 0.56712 | 1.5919 | 0.12918 | 0.1504690 | 1.019426 | 7.891 | 1.5982 | +0.0063 | 1.6962 | +0.1043 |
| 49 | Id. | 0.0271 | 3.167 | 0.48726 | 1.5784 | 0.12700 | 0.1538726 | 1.042485 | 8.208 | 1.6120 | +0.0336 | 1.7054 | +0.1270 |
| 50 | Id. | 0.0271 | 3.167 | 0.72186 | 1.9301 | 0.18988 | 0.2279317 | 1.544237 | 8.132 | 1.9445 | +0.0144 | 2.0809 | +0.1508 |
| | | | | | | | | | 408.504 | | | | |
| 51 | Dubuat. | 0.0271 | 3.167 | 0.97452 | 2.2994 | 0.26943 | 0.3077044 | 2.084097 | 7.735 | 2.2841 | −0.0153 | 2.4323 | +0.1329 |
| | | | | | | | | | 416.239 | | | | |

Si, de la somme totale des valeurs du rapport $\frac{1000Dj}{4h} = 1000b$ qui est de 416.239, on retranche les deux plus petites de ces valeurs qui correspondent aux numéros 19 et 23, et les trois plus grandes qui correspondent aux numéros 1, 2 et 24 lesquelles forment une somme de 54.853, il restera 361.386 pour la somme des 46 autres valeurs de $1000b$, ce qui donnera, pour la moyenne de ces valeurs, 7.854, nombre qui diffère trop peu de celui adopté pour $1000a$, dans l'équation du mouvement uniforme de l'eau dans les courants découverts, pour ne pas préférer ce dernier nombre pour l'équation du mouvement de l'eau dans les tuyaux de conduite, sauf à vérifier par le calcul si l'équation $\frac{1}{4}Dj = 0.007848h$, que nous proposons d'adopter, donne, pour la vitesse, des valeurs aussi exactes que celles obtenues par la formule de Prony. Lorsque l'on fait cette vérification, en comparant les plus fortes différences données par les deux formules, on trouve les résultats suivants :

| N° des expériences. | Différences entre les vitesses observées et les vitesses calculées par la formule | | Différences secondes. | N° des expériences. | Différences entre les vitesses observées et les vitesses calculées par la formule | | Différences secondes. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | de Prony. | proposée. | | | de Prony. | proposée. | |
| 38 | $+0.1831\frac{1}{5}$ | $+0.1331\frac{1}{7}$ | $-0.0500$ | 11 | $-0.0363\frac{1}{19}$ | $-0.0540\frac{1}{12}$ | $+0.0177$ |
| 50 | $+0.1508\frac{1}{18}$ | $+0.0144\frac{1}{150}$ | $-0.1364$ | 32 | $+0.0301\frac{1}{19}$ | $+0.0157\frac{1}{34}$ | $-0.0144$ |
| 51 | $+0.1339\frac{1}{18}$ | $+0.0153\frac{1}{150}$ | $-0.1186$ | 26 | $+0.0252\frac{1}{11}$ | $+0.0283\frac{1}{10}$ | $+0.0031$ |
| 49 | $+0.1270\frac{1}{10}$ | $+0.0336\frac{1}{49}$ | $-0.0934$ | 43 | $+0.0248\frac{1}{25}$ | $+0.0252\frac{1}{24}$ | $+0.0004$ |
| 48 | $+0.1043\frac{1}{15}$ | $+0.0063\frac{1}{250}$ | $-0.0980$ | 44 | $-0.0240\frac{1}{36}$ | $-0.0859\frac{1}{16}$ | $+0.0619$ |
| 47 | $+0.0992\frac{1}{5}$ | $+0.0632\frac{1}{12}$ | $-0.0330$ | 30 | $+0.0211\frac{1}{24}$ | $+0.0134\frac{1}{34}$ | $-0.0077$ |
| 46 | $+0.0545\frac{1}{4}$ | $+0.0574\frac{1}{4}$ | $+0.0029$ | 27 | $+0.0189\frac{1}{15}$ | $-0.0220\frac{1}{18}$ | $+0.0031$ |
| 23 | $-0.0673\frac{1}{14}$ | $-0.0950\frac{1}{10}$ | $+0.0277$ | 29 | $+0.0195\frac{1}{20}$ | $+0.0139\frac{1}{23}$ | $-0.0066$ |
| 19 | $-0.0540\frac{1}{15}$ | $-0.0828\frac{1}{10}$ | $+0.0288$ | 22 | $-0.0160\frac{1}{50}$ | $-0.0516\frac{1}{15}$ | $+0.0356$ |
| 39 | $-0.0477\frac{1}{25}$ | $-0.0977\frac{1}{12}$ | $+0.0500$ | 35 | $-0.0090\frac{1}{55}$ | $-0.0378\frac{1}{21}$ | $+0.0288$ |
| 15 | $-0.0466\frac{1}{16}$ | $-0.0695\frac{1}{14}$ | $+0.0229$ | | | | |

## N° III.

### Calcul du débit ou de la pente des courants.

Pour calculer le débit ou la pente d'un courant, l'hydraulique donne la formule $\frac{aQ^2}{4g} = \frac{\Sigma_0^n \Delta H}{\Sigma_0^n \Delta l\left(\frac{\chi_0}{\omega_0^3} + \frac{\chi_1}{\omega_1^3}\right) + \frac{2}{a}\left(\frac{1}{\omega_n^2} - \frac{1}{\omega_0^2}\right)}$, dans laquelle la quantité $Q\sqrt{\frac{a}{4g}}$ est ce que nous avons appelé la *norme* du courant, car il suffit de connaître cette quantité pour en conclure le débit; si nous la désignons par N, nous aurons $Q = N\sqrt{\frac{4g}{a}}$, mais $\frac{4g}{a}$ est une quantité connue et égale à 5000, on a donc $\sqrt{\frac{4g}{a}} = 70.71$, et pour le débit d'un courant quelconque $Q = 70.71N$, ou si l'on aime mieux $Q^2 = 5000N^2$, et par suite

$$\Sigma_0^n \Delta H = N^2\left(\Sigma_0^n \Delta l\left(\frac{\chi_0}{\omega_0^3} + \frac{\chi_1}{\omega_1^3}\right) + \frac{2}{a}\left(\frac{1}{\omega_n^2} - \frac{4}{\omega_0^2}\right)\right).$$

Nous devons maintenant faire observer que si le nombre *n*, qui est celui des sections ou des parties de rivière que l'on considère, était seulement de 5 ou de 6 ou plus généralement inférieur à 5, la valeur que l'on trouverait pour N serait incomplète et pourrait être inexacte; en effet, il suffit de considérer deux sections pour obtenir une valeur de N, à laquelle correspond nécessairement un débit; or, en prenant les sections deux à deux, on obtiendrait des débits qui différeraient beaucoup entre eux, car par deux sections prises isolément et conservant la même pente absolue, on peut faire passer un grand nombre de débits; la formule donne un de ces débits, mais il ne peut pas être le débit réel.

Si l'on considère trois sections, la courbe exprimée par la formule, aura trois points communs avec l'axe hydraulique, et le débit que l'on obtiendra sera généralement plus approché du débit réel; enfin si l'on considère six,

huit, dix, douze sections consécutives, les deux courbes ayant six, huit, dix, douze points communs, se confondront sensiblement, et le débit calculé approchera d'aussi près que l'on voudra du débit réel; cette approximation sera d'autant plus prompte que les sections seront moins écartées et n'éprouveront pas des variations brusques dans leurs dimensions, afin que la quantité $\Sigma \Delta l \left(\frac{F_0 + F_1}{2}\right)$ diffère d'autant moins de la quantité $\int F dl$, qu'elle remplace, mais à laquelle elle n'est pas rigoureusement égale.

Les tableaux qui vont suivre, présentent les détails des applications de la formule au calcul du débit, ou de la pente du Weser, de l'Elbe, de la Saône et de la Moselle.

### 1. Application relative au Weser.

Funck, dans son Hydrotechnie, fait connaître les résultats d'un nivellement fait sur une partie du cours du Weser de 17061$^m$.97; cette longueur est divisée en deux parties, par le double barrage qui se trouve près de la ville de Hameln; la partie située en amont du premier barrage est de 12383$^m$.35, et celle située en aval du second barrage est de 3785$^m$.46.

Funck donne en outre les aires et les périmètres de 105 sections prises aux points nivelés, mais il ne fait pas connaître la forme des sections, ni leur profondeur, et par conséquent le profil du lit; il s'est borné à indiquer leur largeur et par suite leur profondeur moyenne.

Lorsqu'on applique la formule aux données du Weser, afin d'en calculer le débit, on ne tarde pas à reconnaître que si l'on ne considère qu'un petit nombre de sections, les valeurs de la norme présentent des différences plus on moins fortes; si, par exemple, on prend, comme nous l'avons fait, les sections cinq par cinq, les différences sont peu considérables tant que la rivière est libre, mais elles deviennent énormes lorsque le cours des eaux est contrarié par un obstacle, comme cela a lieu pour les 38 sections qui pré-

cèdent le premier barrage de Hameln; mais lorsqu'on augmente le nombre des sections prises ensemble, les différences entre les valeurs de la norme diminuent graduellement et finissent par disparaître; ainsi les 15 premières sections donnent $0^m.9317$ pour la valeur de la norme; pour les 20 premières, cette valeur est de $0^m.9240$, et pour les 88 sections, prises en amont du premier barrage, elle est de $0^m.9613$; on doit d'ailleurs faire remarquer qu'en prenant ensemble un grand nombre de sections en amont d'un barrage, la valeur de la norme ne se ressent pas de l'effet du barrage sur le mouvement des eaux.

Si nous adoptons $0^m.9613$ pour la valeur de la norme du Wéser, nous trouverons que le débit de cette rivière, au moment des opérations devait être de $68^m.00$; les nombres donnés par Funck, indiquent un débit compris entre $59^m.26$ et $75^m.80$.

Comme vérification de la méthode que nous venons de suivre, nous avons admis le débit de $68^m.00$, et nous avons calculé les pentes partielles du Wéser; nous avons ainsi trouvé que ces pentes différaient très-peu des pentes partielles mesurées, et que la pente totale était de $7^m.654$, tandis que cette même pente, telle qu'elle résulte du nivellement, est seulement de $7^m.744$; c'est-à-dire que sur une longueur de $17061^m.97$, le calcul présente avec l'observation une différence de $0^m.090$. On doit toutefois faire observer que si l'on ne considérait qu'une partie d'une faible longueur, la différence entre la pente calculée et la pente mesurée, pourrait paraître relativement considérable, quoiqu'en réalité cette dfférence fût à peine d'un centimètre; les différences de cette nature tiennent moins au calcul qu'à la difficulté de mesurer avec précision la pente d'un courant, sur une longueur de 40 à $50^m.00$.

| Numéros d'ordre de Funck. | Quantités prises dans Funck. | | | | Quantités calculées, les sections étant prises 5 par 5. | | | | | Pente absolue mesurée $\Sigma_0''\Delta H$. | Quantités calculées, les sections étant prises ensemble. | | Pente absolue calculée le débit étant de 68m.00 $\Sigma_0''\Delta H$. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Distances partielles $\Delta l$ | Pentes partielles $\Delta H$ | Aires des sections $\omega$ | Périmètres des sections $\chi$ | $\frac{1}{\omega^2}$ | $\frac{\chi}{\omega^3}$ | $\Delta l\left(\frac{\chi_0}{\omega_0^3}+\frac{\chi_1}{\omega_1^3}\right)$ | $\frac{2}{g}\left(\frac{1}{\omega_1^2}-\frac{1}{\omega_0^2}\right)$ | Valeur de la norme $N=Q\sqrt{\frac{g}{4g}}$ | | Valeur de la norme N | Débit calculé Q | |
| 401 | | | 117.12 | 113.09 | 0.00007290 | 0.0000703 | | | | | | | |
| | 389.10 | 0.0174 | | | | | 0.0565751 | +0.0003066 | 0.5531 | | | | |
| 402 | | | 116.03 | 117.78 | 0.00007410 | 0.0000751 | | | | 0.0174 | 0.5531 | 39.11 | 0.0525 |
| | 173.46 | 0.0341 | | | | | 0.0233650 | −0.0030148 | 1.2945 | | | | |
| 403 | | | 126.64 | 121.30 | 0.00006230 | 0.0000596 | | | | 0.0515 | 0.8165 | 57.73 | 0.0714 |
| | 206.27 | 0.0738 | | | | | 0.0575699 | +0.0275163 | 0.9326 | | | | |
| 404 | | | 76.68 | 99.00 | 0.00017000 | 0.0002195 | | | | 0.1253 | 0.8785 | 62.12 | 0.1500 |
| | 159.40 | 0.1720 | | | | | 0.0788073 | +0.0033980 | 1.4463 | | | | |
| 405 | | | 73.84 | 110.80 | 0.00018330 | 0.0002749 | | | | 0.1973 | 1.1028 | 77.98 | 0.2259 |
| | 65.60 | 0.0715 | | | | | 0.1094667 | +0.1020427 | 0.58205 | | | | |
| 406 | 993.83 | 0.3688 | 45.51 | 99.10 | 0.00058270 | 0.0013938 | 0.3257840 | +0.1302488 | 0.8973 | 0.3688 | 0.8973 | 63.45 | 0.42138 |
| | 61.00 | 0.0652 | | | | | 0.1068598 | | | | | | |
| 407 | | | 64.05 | 94.13 | 0.00024370 | 0.0003380 | | | | | | | |
| | 79.70 | 0.0861 | | | | | 0.1348742 | | | | | | |
| 408 | | | 45.51 | 94.40 | 0.00058270 | 0.0013280 | | | | | | | |
| | 49.20 | 0.0531 | | | | | 0.0888945 | | | | | | |
| 409 | | | 62.63 | 117.80 | 0.00025470 | 0.0004788 | | | | | | | |
| | 107.81 | 0.0920 | | | | | 0.1390817 | | | | | | |
| 410 | | | 46.16 | 84.96 | 0.00046740 | 0.0008108 | | | | | | | |
| | 166.41 | 0.1360 | | | | | 0.1603027 | | | | | | |
| 411 | 1457.95 | 0.4324 | 91.29 | 116.13 | 0.00011990 | 0.0001525 | 0.6294629 | −0.1182408 | 0.9192 | 0.8012 | 0.9101 | 64.35 | 0.89377 |

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 239.10 | 0.1597 | | | | | 0.086865 | | | | | | |
| 412 | | | 83.91 | 124.81 | 0.00014185 | 0.0002108 | | | | | | | |
| | 227.37 | 0.1523 | | | | | 0.198255 | | | | | | |
| 413 | | | 57.23 | 124.81 | 0.00030520 | 0.0006650 | | | | | | | |
| | 656.32 | 0.4787 | | | | | 0.513833 | | | | | | |
| 414 | | | 99.27 | 115.54 | 0.00010140 | 0.0001179 | | | | | | | |
| | 853.22 | 0.1096 | | | | | 0.126703 | | | | | | |
| 415 | | | 155.04 | 114.26 | 0.00004160 | 0.0000306 | | | | | | | |
| | 581.31 | 0.0211 | | | | | 0.028542 | | | | | | |
| 416 | 4015.27 | 0.9214 | 193.43 | 133.60 | 0.00002673 | 0.0000185 | 0.954198 | −0.0238040 | 0.9957 | 1.7226 | 0.9317 | 65.88 | 1.75322 |
| | 360.98 | 0.0114 | | | | | 0.031802 | | | | | | |
| 417 | | | 125.18 | 136.53 | 0.00006384 | 0.0000696 | | | | | | | |
| | 257.84 | 0.0181 | | | | | 0.037232 | | | | | | |
| 418 | | | 121.49 | 134.19 | 0.00006773 | 0.0000748 | | | | | | | |
| | 206.27 | 0.0302 | | | | | 0.023265 | | | | | | |
| 419 | | | 121.66 | 84.96 | 0.00006757 | 0.0000472 | | | | | | | |
| | 93.76 | 0.0138 | | | | | 0.008204 | | | | | | |
| 420 | | | 132.82 | 94.40 | 0.00005670 | 0.0000408 | | | | | | | |
| | 79.69 | 0.0016 | | | | | 0.008710 | | | | | | |
| 421 | 5013.81 | 0.0751 | 110.94 | 94.40 | 0.00008118 | 0.0000690 | 0.109213 | +0.01399114 | 0.7810 | 1.7977 | 0.9240 | 65.33 | 1.86688 |
| | 101.97 | 0.0250 | | | | | 0.017416 | | | | | | |
| 422 | | | 99.10 | 99.13 | 0.00010181 | 0.0001018 | | | | | | | |
| | 36.33 | 0.0362 | | | | | 0.012221 | | | | | | |
| 423 | | | 74.13 | 103.72 | 0.00018198 | 0.0002346 | | | | | | | |
| | 60.94 | 0.1091 | | | | | 0.055894 | | | | | | |
| 424 | | | 55.34 | 115.54 | 0.00032652 | 0.0006826 | | | | | | | |
| | 56.26 | 0.1007 | | | | | 0.125863 | | | | | | |
| 425 | | | 43.93 | 131.85 | 0.00051802 | 0.0015546 | | | | | | | |
| | 58.60 | 0.1069 | | | | | 0.108164 | | | | | | |
| 426 | 5327.91 | 0.3779 | 65.20 | 80.86 | 0.00023501 | 0.0002912 | 0.319556 | +0.039302 | 1.0265 | 2.1756 | 0.9395 | 66.43 | 2.18929 |

| Numéros d'ordre de Funck. | Quantités prises dans Funck. | | | | Quantités calculées, les sections étant prises 5 par 5. | | | | | Pente absolue mesurée $Z_0 = \Delta H$. | Quantités calculées, les sections étant prises ensemble. | | Pente absolue calculée le débit étant de 68m.00 $Z_0 = \Delta H$. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Distances partielles $\Delta l$. | Pentes partielles $\Delta H$ | Aires des sections $\omega$ | Périmètres des sections $\chi$ | $\frac{1}{\omega^2}$ | $\frac{\chi}{\omega^3}$ | $\Delta l\left(\frac{\chi_0}{\omega_0^3}+\frac{\chi_1}{\omega_1^3}\right)$ | $\frac{2}{a}\left(\frac{1}{\omega_1^2}-\frac{1}{\omega_0^2}\right)$ | Valeur de la norme $N=Q\sqrt{\frac{a}{4g}}$ | | Valeur de la norme N | Débit calculé Q | |
| *Rep.* | 5327.91 | | | | | | | | | | | | |
| | 84.38 | 0.0947 | | | | | 0.044839 | | | | | | |
| 427 | | | 67.27 | 73.24 | 0.00022082 | 0.0002402 | | | | | | | |
| | 28.13 | 0.0095 | | | | | 0.012315 | | | | | | |
| 428 | | | 72.41 | 75.01 | 0.00019072 | 0.0001976 | | | | | | | |
| | 51.57 | 0.0172 | | | | | 0.026373 | | | | | | |
| 429 | | | 64.52 | 84.96 | 0.00023994 | 0.0003138 | | | | | | | |
| | 98.45 | 0.0332 | | | | | 0.064435 | | | | | | |
| 430 | | | 64 52 | 91.99 | 0.00023994 | 0.0003407 | | | | | | | |
| | 103.13 | 0.0346 | | | | | 0.079369 | | | | | | |
| 431 | 5693.57 | 0.1892 | 62.29 | 103.72 | 0.00025760 | 0.0004289 | 0.227331 | +0 005771 | 0.9009 | 2.3648 | 0.9363 | 66.20 | 2.40460 |
| | 103.14 | 0.0347 | | | | | 0.077365 | | | | | | |
| 432 | | | 75.16 | 136.53 | 0.00017689 | 0.0003212 | | | | | | | |
| | 112.80 | 0.0787 | | | | | 0.084918 | | | | | | |
| 433 | | | 67.27 | 131.85 | 0.00022052 | 0.0004318 | | | | | | | |
| | 102.85 | 0.0882 | | | | | 0.103621 | | | | | | |
| 434 | | | 53 80 | 89.65 | 0.00034559 | 0.0005757 | | | | | | | |
| | 99.03 | 0.0815 | | | | | 0.080422 | | | | | | |
| 435 | | | 66.92 | 70.90 | 0.00022320 | 0.0002364 | | | | | | | |
| | 189.28 | 0.1643 | | | | | 0.089870 | | | | | | |
| 436 | 6300.67 | 0.4474 | 66.92 | 71.48 | 0.00022320 | 0.0002384 | 0.436216 | —0.0087888 | 1.2115 | 2.8122 | 0.9486 | 67.07 | 2.79919 |

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 191.62 | 0.0030 | | | | | 0.079771 | | | | | | |
| 437 | | | 87.94 | 122.47 | 0.00012927 | 0.0001779 | | | | | | | |
| | 272.49 | 0.0541 | | | | | 0.078913 | | | | | | |
| 438 | | | 99.02 | 108.70 | 0.00010181 | 0.0001117 | | | | | | | |
| | 215.65 | 0.0304 | | | | | 0.039917 | | | | | | |
| 439 | | | 108.88 | 94.93 | 0.00008427 | 0.00007340 | | | | | | | |
| | 234.40 | 0.0069 | | | | | 0.028625 | | | | | | |
| 440 | | | 132.47 | 113.68 | 0.00005685 | 0.00004872 | | | | | | | |
| | 215.65 | 0.0216 | | | | | 0.021777 | | | | | | |
| 441 | 7430.48 | 0.1160 | 130.41 | 113.68 | 0.00005867 | 0.00005227 | 0.249003 | −0.042036 | 0.7483 | 2.9282 | 0.9374 | 66.28 | 2.99048 |
| | 100.79 | 0.0171 | | | | | 0.0081045 | | | | | | |
| 442 | | | 139.94 | 77.35 | 0.00005098 | 0.00002814 | | | | | | | |
| | 78.45 | 0.0167 | | | | | 0.0050325 | | | | | | |
| 443 | | | 128.01 | 76.76 | 0.00006099 | 0.00003601 | | | | | | | |
| | 113.76 | 0.0158 | | | | | 0.0129845 | | | | | | |
| 444 | | | 101.59 | 82.03 | 0.00009682 | 0.00007813 | | | | | | | |
| | 79.69 | 0.0138 | | | | | 0.0117232 | | | | | | |
| 445 | | | 110.68 | 94.93 | 0.00008172 | 0.00007011 | | | | | | | |
| | 58.60 | 0.0122 | | | | | 0.0055852 | | | | | | |
| 446 | 7861.77 | 0.0756 | 161.90 | 107.23 | 0.00003807 | 0.00002520 | 0.0434299 | −0.005263 | 1.4086 | 3.0038 | 0.9440 | 66.75 | 3.02578 |
| | 70.32 | 0.0211 | | | | | 0.0048977 | | | | | | |
| 447 | | | 126.72 | 90.53 | 0.00006225 | 0.00004445 | | | | | | | |
| | 58.60 | 0.0151 | | | | | 0.0084284 | | | | | | |
| 448 | | | 59.57 | 71.49 | 0.00012454 | 0.00009938 | | | | | | | |
| | 53.92 | 0.0071 | | | | | 0.0128733 | | | | | | |
| 449 | | | 82.36 | 75.60 | 0.00014778 | 0.00013566 | | | | 3.0438 | | | |
| | 44.53 | 0.0062 | | | | | 0.0119349 | | | | | | |
| 450 | | | 85.20 | 82.03 | 0.00013759 | 0.00013236 | | | | | | | |
| | 46.88 | 0.0062 | | | | | 0.0119224 | | | | | | |
| 451 | 8136.02 | 0.0557 | 89.91 | 89.07 | 0.00012365 | 0.00012217 | 0.0500667 | +0.021865 | 0.8802 | 3.0595 | 0.9428 | 66.66 | 3.09222 |

| Numéros d'ordre de Funck. | Quantités prises dans Funck. | | | | Quantités calculées, les sections étant prises 5 par 5. | | | | | Pente absolue mesurée $\Sigma_0$ "ΔH. | Quantités calculées, les sections étant prises ensemble. | | Pente absolue calculée le débit étant de 68m.00 $\Sigma_0$ "ΔH. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Distances partielles $\Delta l$. | Pentes partielles ΔH | Aires des sections $\omega$ | Périmètres des sections $\chi$ | $\frac{1}{\omega_2}$ | $\frac{\chi}{\omega^3}$ | $\Delta l\left(\frac{\chi_0}{\omega_0^3}+\frac{\chi_1}{\omega_1^3}\right)$ | $\frac{a}{d}\left(\frac{1}{\omega_1^2}-\frac{1}{\omega_0^2}\right)$ | Valeur de la norme $N=Q\sqrt{\frac{a}{4g}}$ | | Valeur de la norme N | Débit calculé Q | |
| *Rep.* | 8136.02 | | | | | | | | | | | | |
| | 79.70 | 0.0107 | | | | | 0.0186538 | | | | | | |
| 452 | | | 92.66 | 89.07 | 0.00011642 | 0.00011188 | | | | | | | |
| | 53.91 | 0.0076 | | | | | 0.0128489 | | | | | | |
| 453 | | | 89.23 | 90.24 | 0.00012521 | 0.00012646 | | | | | | | |
| | 46.88 | 0.0067 | | | | | 0.0098265 | | | | | | |
| 454 | | | 104.50 | 94.93 | 0.00009158 | 0.00008815 | | | | | | | |
| | 46.88 | 0.0068 | | | | | 0.0068182 | | | | | | |
| 455 | | | 115.06 | 94.98 | 0.00007551 | 0.00006229 | | | | | | | |
| | 46.88 | 0.0068 | | | | | 0.0039876 | | | | | | |
| 456 | 8410.27 | 0.0385 | 163.53 | 99.91 | 0.00003733 | 0.00002277 | 0.0521350 | —0.022054 | 1.1310 | 3.0980 | 0.9446 | 66.79 | 3.12003 |
| | 58.60 | 0.0084 | | | | | 0.0027882 | | | | | | |
| 457 | | | 162.33 | 104.60 | 0.00003794 | 0.00002481 | | | | | | | |
| | 86.73 | 0.0132 | | | | | 0.0042506 | | | | | | |
| 458 | | | 162.88 | 104.60 | 0.00003776 | 0.00002420 | | | | | | | |
| | 112.51 | 0.0071 | | | | | 0.0067911 | | | | | | |
| 459 | | | 146.60 | 113.97 | 0.00004651 | 0.00003616 | | | | | | | |
| | 103.14 | 0.0072 | | | | | 0.0057985 | | | | | | |
| 460 | | | 180.87 | 118.66 | 0.00003058 | 0.00002006 | | | | | | | |
| | 89.07 | 0.0062 | | | | | 0.0033259 | | | | | | |
| 461 | 8860.32 | 0.0421 | 185.99 | 110.75 | 0.00002883 | 0.00001728 | 0.0229543 | —0.00217166 | 1.4192 | 3.1401 | 0.9481 | 67.04 | 3.18925 |
| | 98.45 | 0.0070 | | | | | 0.0036692 | | | | | | |
| 462 | | | 180.02 | 117.01 | 0.00003080 | 0.00001999 | 0.0041927 | | | | | | |
| | 96.10 | 0.0071 | | | | | | | | | | | |

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 463 | | | 152.46 | 125.40 | 0.00004303 | 0.00002676 | | | | | | | |
| | 89.07 | 0.0036 | | | | | 0.0039957 | | | | | | |
| 464 | | | 191.89 | 128.03 | 0.00002714 | 0.00001810 | | | | | | | |
| | 93 76 | 0.0126 | | | | | 0.0040392 | | | | | | |
| 465 | | | 174.09 | 132.13 | 0.00008295 | 0.00002498 | | | | | | | |
| | 232.06 | 0.0264 | | | | | 0.0143993 | | | | | | |
| 466 | 9469.76 | 0.0567 | 150.92 | 127.74 | 0.00004382 | 0.00003707 | 0.0305961 | +0.00382979 | 1.2838 | 3.1968 | 0.9519 | 67.31 | 3.17104 |
| | 257.84 | 0.0212 | | | | | 0.0178688 | | | | | | |
| 467 | | | 151.26 | 111.66 | 0.00004369 | 0.00003224 | | | | | | | |
| | 257.84 | 0.0222 | | | | | 0.0092807 | | | | | | |
| 468 | | | 180.52 | 102.54 | 0.00003069 | 0.00001745 | | | | | | | |
| | 236.74 | 0.0141 | | | | | 0.0049376 | | | | | | |
| 469 | | | 220.68 | 114.56 | 0.00002052 | 0.00001065 | | | | | | | |
| | 256.50 | 0.0065 | | | | | 0.0059559 | | | | | | |
| 470 | | | 197.68 | 96.98 | 0.00002560 | 0.00001257 | | | | | | | |
| | 278.93 | 0.0086 | | | | | 0.0158014 | | | | | | |
| 471 | 10756.61 | 0.0726 | 135.22 | 104.60 | 0.00005816 | 0.00004408 | 0.0538444 | +0.00366337 | 1.1232 | 3.2694 | 0.9549 | 67.52 | 3.22417 |
| | 246.12 | 0.0151 | | | | | 0.0202212 | | | | | | |
| 472 | | | 140.02 | 104.60 | 0.00005098 | 0.00003808 | | | | | | | |
| | 208.62 | 0.0060 | | | | | 0.0097780 | | | | | | |
| 473 | | | 227.20 | 103.13 | 0.00001936 | 0.00000879 | | | | | | | |
| | 57.86 | 0.0035 | | | | | 0.0010739 | | | | | | |
| 474 | | | 221.91 | 108.13 | 0.00002079 | 0.00000977 | | | | | | | |
| | 56.25 | 0.0032 | | | | | 0.0008437 | | | | | | |
| 475 | | | 272.33 | 106.06 | 0.00001344 | 0.00000523 | | | | | | | |
| | 56.26 | 0.0020 | | | | | 0.0006497 | | | | | | |
| 476 | 11380.12 | 0.0298 | 249.68 | 98.73 | 0.00001600 | 0.00000632 | 0.0325665 | —0.0107714 | 1.1505 | 3.2992 | 0.9564 | 67.63 | 3.24431 |
| | 46.88 | 0.0013 | | | | | 0.0006741 | | | | | | |
| 477 | | | 232.17 | 96.69 | 0.00001910 | 0.00000806 | | | | | | | |
| | 32.81 | 0.0009 | | | | | 0.0004962 | | | | | | |
| 478 | | | 238.69 | 92.00 | 0.00001755 | 0.00000676 | | | | | | | |
| | 42.20 | 0.0011 | | | | | 0.0007815 | | | | | | |
| | 11502.01 | 0.0033 | | | | | 0.0019518 | | | | | | |

| Numéros d'ordre de Funck. | Quantités prises dans Funck. | | | | Quantités calculées, les sections étant prises 5 par 5. | | | | | Pente absolue mesurée $\Sigma_0^n \Delta H$. | Quantités calculées, les sections étant prises ensemble. | | Pente absolue calculée le débit étant de 68m.00 $\Sigma_0^n \Delta H$. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Distances partielles $\Delta l$. | Pentes partielles $\Delta H$ | Aires des sections $\omega$ | Périmètres des sections $\chi$ | $\frac{1}{\omega^2}$ | $\frac{\chi}{\omega^3}$ | $\Delta l\left(\frac{\chi_0}{\omega_0^3}+\frac{\chi_1}{\omega_1^3}\right)$ | $\frac{2}{a}\left(\frac{1}{\omega_1^2}-\frac{1}{\omega_0^2}\right)$ | Valeur de la norme $N=Q\sqrt{\frac{a}{4g}}$ | | Valeur de la norme N | Débit calculé Q | |
| *Rep.* | 11502.01 | 0.0033 | | | | | | | | | | | |
| 479 | | | 206.60 | 102.84 | 0.00002362 | 0.00001176 | 0.0019518 | | | | | | |
| | 42.20 | 0.0012 | | | | | | | | | | | |
| 480 | | | 191.50 | 107.55 | 0.00002725 | 0.00001529 | 0.0011415 | | | | | | |
| | 51.57 | 0.0014 | | | | | | | | | | | |
| 481 | 11595.77 | 0.0059 | 169.02 | 107.24 | 0.00003493 | 0.00002214 | 0.0019302 | +0.00483642 | 0.7736 | 3.3051 | 0.9559 | 67.59 | 3.25542 |
| | 84.38 | 0.0024 | | | | | 0.0050235 | | | | | | |
| 482 | | | 216.73 | 107.55 | 0.00002125 | 0.00001054 | 0.0027575 | | | | | | |
| | 86.73 | 0.0028 | | | | | | | | | | | |
| 483 | | | 221.71 | 114.75 | 0.00002034 | 0.00001051 | 0.0018257 | | | | | | |
| | 86.73 | 0.0026 | | | | | | | | | | | |
| 484 | | | 257.40 | 126.57 | 0.00001505 | 0.00000739 | 0.0015524 | | | | | | |
| | 111.92 | 0.0035 | | | | | | | | | | | |
| 485 | | | 287.17 | 131.26 | 0.00001211 | 0.00000553 | 0.0013447 | | | | | | |
| | 117.79 | 0.0035 | | | | | | | | | | | |
| 486 | 12083.32 | 0.0148 | 328.10 | 134.19 | 0.00000930 | 0.00000380 | 0.0010989 | −0.00654821 | 2.700 | 3.8199 | 0.9578 | 67.73 | 3.25529 |
| | | | | | | | 0.0085792 | | | | | | |
| | 96.10 | 0.0037 | | | | | | | | | | | |
| 487 | | | 352.38 | 121.88 | 0.00000801 | 0.00000276 | 0.0006907 | | | | | | |
| | 100.79 | 0.0078 | | | | | | | | | | | |
| 488 | | | 317.89 | 104.30 | 0.00000976 | 0.00000319 | 0.0005997 | | | | | | |
| | 103.14 | 0.0149 | | | | | | | | | | | |
| 489 | 12383.35 | 0.0264 | 308.88 | 106.65 | 0.00001033 | 0.00000355 | 0.0006951 | +0.00026315 | 3.4255 | 3.3463 | 0.9613 | 68.00 | 3.25736 |
| | | | | | | | 0.0019855 | | | | | | |

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 490 | 13276.41 | | 99.35 | 99.62 | 0.00010120 | 0.00010140 | | | | 5.9895 | | | 5.90056 |
| | 157.05 | 0.0821 | | | | | 0.0571992 | | | | | | |
| 491 | | | 75.50 | 114.56 | 0.00017556 | 0.00026281 | | | | | | | |
| | 264.87 | 0.1243 | | | | | 0.1251749 | | | | | | |
| 492 | | | 75.33 | 90.24 | 0.00017609 | 0.00020978 | | | | | | | |
| | 182.83 | 0.1096 | | | | | 0.0819371 | | | | | | |
| 493 | | | 66.92 | 71.49 | 0.00022320 | 0.00023938 | | | | | | | |
| | 199.24 | 0.1105 | | | | | 0.0812943 | | | | | | |
| 494 | | | 84.94 | 103.72 | 0 00018853 | 0 00016914 | | | | | | | |
| | 229.71 | 0.1418 | | | | | 0.1747771 | | | | | | |
| 495 | 14310.11 | 0.5683 | 55.94 | 103.72 | 0.00031933 | 0.00059172 | 0.5203826 | +0.055730 | 0.9932 | 6.5578 | 0.9932 | 70.23 | 6.43284 |
| | 234.40 | 0.1562 | | | | | 0.3063327 | | | | | | |
| 496 | | | 51.82 | 99.03 | 0.00037365 | 0 00071516 | | | | | | | |
| | 229.72 | 0.2010 | | | | | 0.3011161 | | | | | | |
| 497 | | | 51.48 | 89.65 | 0.00037713 | 0.00065658 | | | | | | | |
| | 220.34 | 0.1930 | | | | | 0.2184407 | | | | | | |
| 498 | | | 66.75 | 96.37 | 0.00022440 | 0.00033480 | | | | | | | |
| | 220.33 | 0.0514 | | | | | 0.0983839 | | | | | | |
| 499 | | | 94.64 | 94.93 | 0.00011151 | 0.00011173 | | | | | | | |
| | 206.27 | 0.0496 | | | | | 0.0362622 | | | | | | |
| 500 | 15421.17 | 0.6512 | 111.02 | 87.90 | 0.00008100 | 0.00006407 | 0.9605356 | −0.0608909 | 0.8508 | 7.2090 | 0.9087 | 64.25 | 7.26416 |
| | 220.34 | 0.0356 | | | | | 0.0253258 | | | | | | |
| 501 | | | 111.97 | 71.49 | 0.00007974 | 0.00005087 | | | | | | | |
| | 206.37 | 0.0170 | | | | | 0.0218319 | | | | | | |
| 502 | | | 146.20 | 171.70 | 0.00004678 | 0.00005492 | | | | | | | |
| | 244.78 | 0.0276 | | | | | 0.0645999 | | | | | | |
| 503 | | | 74.39 | 86.13 | 0.00018063 | 0.00020899 | | | | | | | |
| | 385.97 | 0.0691 | | | | | 0.1056459 | | | | | | |
| 504 | | | 111.62 | 90.24 | 0.00008010 | 0.00006472 | | | | | | | |
| | 328.26 | 0.2904 | | | | | 0.0461895 | | | | | | |
| 505 | | | 70.27 | 95.81 | 0.00020249 | 0.00027599 | | | | | | | |
| | 356.38 | 0.0952 | | | | | 0.1471707 | | | | | | |
| 506 | 17161.97 | 0.5349 | 89.15 | 97.27 | 0.00012566 | 0.00013697 | 0.4107737 | +0.0114102 | 1.1260 | 7.7439 | 0.9606 | 67.92 | 7.65339 |

### 2. Application relative à l'Elbe.

Nous avons encore pris dans Funck les résultats d'un nivellement fait sur une partie du cours de l'Elbe, de 8638$^m$.42 de longueur ainsi que les aires et les contours des sections qui se rapportent à cette partie. L'application de la formule à ces données nous à fait trouver pour la valeur de la norme, le nombre 6$^m$.3915 pour les vingt premières sections, et celui de 6$^m$.5175 pour les quarante premières, enfin pour l'ensemble des sections, ce nombre est de 6$^m$.6058; si l'on adopte 6$^m$.4522 pour la valeur de la norme, on trouvera que le débit de l'Elbe, à l'époque de l'opération, devait être de 456$^m$.38; d'après Funck, ce débit ne devrait pas dépasser 436$^m$.38.

Comme vérification des calculs précédents, nous avons déterminé les pentes partielles de l'Elbe en admettant que le débit soit de 456$^m$.38, nous avons ainsi trouvé que les pentes calculées ne présentaient que de légères différences avec les pentes mesurées et que la pente totale calculée était de 1$^m$.8814, tandis que cette même pente, telle qu'elle résulte du nivellement, était de 1$^m$.9622, c'est-à-dire que sur la longueur de 8638$^m$.42, la pente calculée présente une différence de 0$^m$.0806, avec la pente qui résulte d'un nivellement supposé fait avec soin.

| Numéros d'ordre de Funck. | Quantités prises dans Funck. | | | | Quantités calculées, les sections étant prises 7 par 7. | | | | | Pente absolue mesurée $\Sigma_0{}^n\Delta H$ | Quantités calculées, les sections étant prises ensemble. | | Pente absolue calculée le débit étant de 456m38 $\Sigma_0{}^n\Delta H$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Distances partielles $\Delta l$ | Pentes partielles $\Delta H$ | Aires des sections $\omega$ | Périmètres des sections $\chi$ | $\frac{1}{\omega^2}$ | $\frac{\chi}{\omega^3}$ | $\Delta l\left(\frac{\chi_0}{\omega_0{}^3}+\frac{\chi_1}{\omega_1{}^3}\right)$ | $\frac{2}{a}\left(\frac{1}{\omega_1{}^2}-\frac{1}{\omega_0{}^2}\right)$ | Valeur de la norme $N=Q\sqrt{\frac{a}{4g}}$ | | Valeur de la norme N | Débit calculé Q | |
| | | | 394.97 | 199.45 | 0.00000640 | 0.00000323 | | | | | | | |
| | 173.11 | 0.0174 | | | | | 0.0010144 | —0.00033725 | 5.07 | | | | |
| 507 | | | 445.20 | 230.50 | 0.00000508 | 0.00000263 | | | | 0.0174 | 5.07 | 358.50 | 0.0282 |
| | 169.34 | 0.1241 | | | | | 0.0007332 | —0.00017117 | 14.86 | | | | |
| 508 | | | 476.16 | 181.89 | 0.00000441 | 0.00000170 | | | | 0.1415 | 10.68 | 755.18 | 0.0516 |
| | 170.60 | 0.0392 | | | | | 0.0006278 | +0.00036024 | 6.30 | | | | |
| 509 | | | 414.53 | 141.12 | 0.00000582 | 0.00000198 | | | | 0.1807 | 9.007 | 636.88 | 0.0927 |
| | 183.14 | 0.0327 | | | | | 0.0006117 | —0.00031425 | 10.64 | | | | |
| 510 | | | 466 68 | 137.98 | 0.00000459 | 0.00000136 | | | | 0.2134 | 9.19 | 649.82 | 0.1051 |
| | 180.63 | 0.0392 | | | | | 0.0004516 | —0.00018651 | 12.14 | | | | |
| 511 | | | 509.00 | 150.58 | 0.00000386 | 0.00000114 | | | | 0.2526 | 9.51 | 672.45 | 0.1161 |
| | 186.28 | 0.0109 | | | | | 0.0004675 | +0.00001788 | 4.74 | | | | |
| 512 | | | 504.47 | 75.62 | 0.00000398 | 0.00000137 | | | | 0.2635 | 8.97 | 634.27 | 0.1363 |
| | 180.64 | 0.0479 | | | | | 0.0007009 | +0.00037046 | 6.68 | | | | |
| 513 | 1243.74 | 0.3114 | 430.95 | 201.33 | 0.00000538 | 0.00000251 | 0.0046071 | —0.0002606 | 8.4643 | 0.3114 | 8.46 | 598.20 | 0.1809 |
| | 174.99 | 0.0457 | | | | | 0.0013789 | | | | | | |
| 514 | | | 344.15 | 218.89 | 0.00000844 | 0.00000537 | | | | | | | |
| | 169.34 | 0.0719 | | | | | 0.0018052 | | | | | | |
| 515 | | | 341.79 | 211.37 | 0.00000855 | 0.00000529 | | | | | | | |
| | 180.63 | 0.0653 | | | | | 0.0016455 | | | | | | |
| | 1768.70 | 0.1829 | | | | | 0.0048296 | | | | | | |

| Numéros d'ordre de Funck. | Quantités prises dans Funck. | | | | Quantités calculées, les sections étant prises 7 par 7. | | | | | Pente absolue mesurée $\Sigma_0''\Delta H$ | Quantités calculées, les sections étant prises ensemble. | | Pente absolue calculée, le débit étant de 456m38 $\Sigma_0''\Delta H$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Distances partielles $\Delta l$ | Pentes partielles $\Delta H$ | Aires des sections $\omega$ | Périmètres des sections $\chi$ | $\frac{1}{\omega^2}$ | $\frac{\chi}{\omega^3}$ | $\Delta l\left(\frac{\chi_0}{\omega_0^3}+\frac{\chi_1}{\omega_1^3}\right)$ | $\frac{2}{a}\left(\frac{1}{\omega_1^2}-\frac{1}{\omega_0^2}\right)$ | Valeur de la norme $N=Q\sqrt{\frac{a}{4g}}$ | | Valeur de la norme N | Débit calculé Q | |
| *Rep.* | 1768.70 | 0.1829 | | | | | 0.0048296 | | | | | | |
| 516 | | | 379.54 | 208.86 | 0.00000694 | 0.00000382 | | | | | | | |
| | 203.22 | 0.0131 | | | | | 0.0015607 | | | | | | |
| 517 | | | 406.37 | 259.37 | 0.00000605 | 0.00000386 | | | | | | | |
| | 174.98 | -0.1740 | | | | | 0.0013963 | | | | | | |
| 518 | | | 448.35 | 371.93 | 0.00000497 | 0.00000412 | | | | | | | |
| | 203.22 | 0.0370 | | | | | 0.0021439 | | | | | | |
| 519 | | | 372.95 | 333 98 | 0.00000719 | 0.00000643 | | | | | | | |
| | 208.86 | 0.1024 | | | | | 0 0021345 | | | | | | |
| 520 | 2558.98 | 0.3180 | 413.84 | 268.75 | 0.00000584 | 0.00000379 | 0.0120650 | +0.0001175 | 5.1091 | 0.6294 | 6.17 | 436.28 | 0.6879 |
| | 174.98 | 0.0761 | | | | | 0.0009623 | | | | | | |
| 521 | | | 483.05 | 192.55 | 0.00000428 | 0.00000171 | | | | | | | |
| | 188.79 | 0.0521 | | | | | 0.0006853 | | | | | | |
| 522 | | | 450.70 | 175.62 | 0.00000492 | 0.00000192 | | | | | | | |
| | 203.21 | 0.0523 | | | | | 0.0010750 | | | | | | |
| 523 | | | 366.56 | 165.95 | 0.00000744 | 0.00000337 | | | | | | | |
| | 201.33 | 0.0566 | | | | | 0.0014536 | | | | | | |
| 524 | | | 349.46 | 164.32 | 0.00000818 | 0.00000385 | | | | | | | |
| | 210.74 | 0.0305 | | | | | 0.0013972 | | | | | | |
| 525 | | | 396.84 | 173.73 | 0.00000634 | 0.00000278 | | | | | | | |
| | 220.15 | 0.0436 | | | | | 0.0008894 | | | | | | |

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 526 | | | 520.01 | 176.87 | 0.00000370 | 0.00000126 | | | | | | | |
| | 169.34 | 0.0239 | | | | | 0.0006689 | | | | | | |
| 527 | 3927.52 | 0.2353 | 420.03 | 198.82 | 0.00000566 | 0.00000269 | 0.0071317 | −0.0000460 | 6.8790 | 0.9647 | 6.39 | 451.84 | 0.9829 |
| | 164.96 | 0.0763 | | | | | 0.0009501 | | | | | | |
| 528 | | | 395.75 | 190.36 | 0.00000638 | 0.00000307 | | | | | | | |
| | 203.21 | 0.0065 | | | | | 0.0016786 | | | | | | |
| 529 | | | 343.95 | 211.99 | 0.00000842 | 0.00000519 | | | | | | | |
| | 205.10 | −0.0014 | | | | | 0.0018501 | | | | | | |
| 530 | | | 360.66 | 180.00 | 0.00000768 | 0.00000383 | | | | | | | |
| | 222.01 | 0.0567 | | | | | 0.0013686 | | | | | | |
| 531 | | | 434.09 | 190.67 | 0.00000530 | 0.00000233 | | | | | | | |
| | 188.16 | 0.0762 | | | | | 0.0006924 | | | | | | |
| 532 | | | 473.02 | 142.69 | 0.00000447 | 0.00000135 | | | | | | | |
| | 188.17 | 0.0675 | | | | | 0.0004610 | | | | | | |
| 533 | | | 544.19 | 177.18 | 0.00000337 | 0.00000110 | | | | | | | |
| | 188.16 | 0.0087 | | | | | 0.0007207 | | | | | | |
| 534 | 5287.29 | 0 2875 | 368.43 | 136.73 | 0.00000736 | 0.00000273 | 0.0077015 | +0.0004343 | 6.0467 | 1.2522 | 6.30 | 445.47 | 1.3217 |
| | 184.40 | 0.0523 | | | | | 0.00088327 | | | | | | |
| 535 | | | 439.50 | 174.99 | 0.00000517 | 0.00000206 | | | | | | | |
| | 190.04 | 0.0413 | | | | | 0.00097490 | | | | | | |
| 536 | | | 386.91 | 178.12 | 0.00000668 | 0.00000307 | | | | | | | |
| | 195.69 | 0.0436 | | | | | 0.00120153 | | | | | | |
| 537 | | | 396.34 | 191.30 | 0.00000636 | 0.00000307 | | | | | | | |
| | 176.87 | 0.0457 | | | | | 0.00087374 | | | | | | |
| 538 | | | 441.96 | 173.42 | 0.00000512 | 0.00000187 | | | | | | | |
| | 195.69 | 0.0262 | | | | | 0.00078471 | | | | | | |
| 539 | | | 423.47 | 163.07 | 0.00000557 | 0.00000214 | | | | | | | |
| | 180.63 | 0.0218 | | | | | 0.00079477 | | | | | | |
| 540 | | | 436.35 | 198.19 | 0.00000525 | 0.00000226 | | | | | | | |
| | 208.86 | 0 0479 | | | | | 0.00101297 | | | | | | |
| 541 | 6619.47 | 0.2788 | 435.86 | 214.50 | 0.00000526 | 0.00000259 | 0 00652589 | −0.0005365 | 6.8226 | 1.5310 | 6.39 | 451.84 | 1.5709 |

| Numéros d'ordre de Funck. | Quantités prises dans Funck. | | | | Quantités calculées, les sections étant prises 7 par 7. | | | | | Pente absolue mesurée $\Sigma_0^n \Delta H$ | Quantités calculées, les sections étant prises ensemble. | | Pente absolue calculée, le débit étant de 456m³88 $\Sigma_0^n \Delta H$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Distances partielles $\Delta l$ | Pentes partielles $\Delta H$ | Aires des sections $\omega$ | Périmètres des sections $\chi$ | $\frac{1}{\omega^2}$ | $\frac{\chi}{\omega^3}$ | $\Delta l\left(\frac{\chi_0}{\omega_0^3}+\frac{\chi_1}{\omega_1^3}\right)$ | $\frac{2}{a}\left(\frac{1}{\omega_1^2}-\frac{1}{\omega_0^2}\right)$ | Valeur de la norme $N=Q\sqrt{\frac{a}{4g}}$ | | Valeur de la norme N | Débit calculé Q | |
| *Rep.* | 6919.47 | | | | | | | | | | | | |
| | 210.74 | 0.0326 | | | | | 0.00112746 | | | | | | |
| 542 | | | 399.88 | 176.87 | 0.00000625 | 0.00000276 | | | | | | | |
| | 199.45 | 0.0436 | | | | | 0.00105708 | | | | | | |
| 543 | | | 402.54 | 165.95 | 0.00000617 | 0.00000254 | | | | | | | |
| | 206.97 | 0.0544 | | | | | 0.00090445 | | | | | | |
| 544 | | | 447.66 | 164.95 | 0.00000498 | 0.00000183 | | | | | | | |
| | 270.94 | 0.0349 | | | | | 0.00113966 | | | | | | |
| 545 | | | 431.93 | 197.57 | 0.00000536 | 0.00000245 | | | | | | | |
| | 135.48 | 0.0418 | | | | | 0.00061508 | | | | | | |
| 546 | | | 456.60 | 199.45 | 0.00000479 | 0.00000209 | | | | | | | |
| | 195.69 | 0.0458 | | | | | 0.00078276 | | | | | | |
| 547 | | | 463.19 | 190.36 | 0.00000466 | 0.00000191 | | | | | | | |
| | 205.10 | 0.0566 | | | | | 0.00062760 | | | | | | |
| 548 | 8043.84 | 0.3092 | 530.62 | 172.48 | 0.00000355 | 0.00000115 | 0.00625409 | —0.00043690 | 7.2906 | 1.8402 | 6.52 | 461.03 | 1.8131 |
| | 206.97 | 0.0218 | | | | | 0.00059193 | | | | | | |
| 549 | | | 468.50 | 175.62 | 0.00000455 | 0.00000171 | | | | | | | |
| | 199.45 | 0.0502 | | | | | 0.00060233 | | | | | | |
| 550 | | | 487.27 | 151.78 | 0.00000421 | 0.00000131 | | | | | | | |
| | 188.16 | 0.0500 | | | | | 0.00045537 | | | | | | |
| 551 | 8638.42 | 0.1220 | 533.37 | 168.09 | 0.00000351 | 0.00000111 | 0.00164963 | —0.0000102 | 8.6264 | 1.9622 | 6.60 | 466.68 | 1.8817 |

### 3. Application relative à la partie de la Saône, comprise entre Saint-Symphorien et Verdun.

Nous prendrons dans le cours de construction de M. Minard, inspecteur-général des Ponts-et-Chaussées, les résultats des opérations faites sur la partie du cours de la Saône, comprise entre Saint-Symphorien et Verdun, dont la longueur est de 16000$^{m}$.00.

Dans cette partie les profils ont été pris de kilomètre en kilomètre, distance trop considérable pour que l'on puisse être certain des résultats; cependant l'application de la formule à ces données, nous a fait trouver, pour la valeur de la norme, le nombre de 0$^{m}$2866 pour les quatre premières section; celui de 0$^{m}$.3945 pour les huit premières, enfin pour l'ensemble des section ce nombre est de 0$^{m}$.4192. Si l'on adopte 0$^{m}$.4038, moyenne des trois derniers nombres ainsi obtenus, pour la valeur de la norme, on trouvera que le débit de la Saône à l'époque des opérations devait être de 28$^{m}$.55.

D'après M. Minard, ce débit devrait être de 26$^{m}$.41; cependant, page 42 du même ouvrage, l'auteur indique que le débit de la Saône, mesuré entre l'embouchure de l'Ognon et celle de la Bèze, dans une partie située en amont de la précédente où le débit devait être moindre, a été trouvé de 28$^{m}$.00.

Comme vérification du calcul précédent, nous avons déterminé les pentes partielles de la Saône, en admettant que le débit soit effectivement de 28$^{m}$.50, nous avons ainsi trouvé que les pentes calculées, sur la longueur totale de 16 kilomètres, ne différaient des pentes mesurées que de 0$^{m}$.14.

| Numéros d'ordre de Funck. | Quantités mesurées. | | | | Quantités calculées, les sections étant prises 7 par 7. | | | | | Pente absolue mesurée $\Sigma_0{}^n\Delta H$ | Quantités calculées, les sections étant prises ensemble. | | Pente absolue calculée le débit étant de 28m.50 $\Sigma_0{}^n\Delta H$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Distances partielles $\Delta l$ | Pentes partielles $\Delta H$ | Aires des sections $\omega$ | Périmètres des sections $\chi$ | $\frac{1}{\omega^2}$ | $\frac{\chi}{\omega^3}$ | $\Delta l\left(\frac{\chi_0}{\omega_0{}^3}+\frac{\chi_1}{\omega_1{}^3}\right)$ | $\frac{2}{a}\left(\frac{1}{\omega_1{}^2}-\frac{1}{\omega_0{}^2}\right)$ | Valeur de la norme $N=Q\sqrt{\frac{a}{4g}}$ | | Valeur de la norme N | Débit calculé Q | |
| 64 | | | 141.59 | 108.50 | 0.00004984 | 0.00003818 | | | | | | | |
| | 1000.00 | 0.130 | | | | | 0.63280 | +0.08026695 | 0.4270 | 0.130 | 0.4270 | 30.19 | 0.116 |
| 65 | | | 52.10 | 85.00 | 0.00036481 | 0 00059462 | | | | | | | |
| | 1000.00 | 0.013 | | | | | 0.92524 | —0.04158224 | 0.1213 | 0.143 | 0.2993 | 21.169 | 0.259 |
| 66 | | | 70.31 | 115.50 | 0.00020164 | 0.00033062 | | | | | | | |
| | 1000.00 | 0.053 | | | | | 0.70796 | +0.01883777 | 0.2701 | 0.196 | 0.2908 | 20.56 | 0.377 |
| 67 | | | 60.18 | 82.50 | 0.00027556 | 0.00037724 | | | | | | | |
| | 1000.00 | 0.024 | | | | | 0.41496 | —0.06077169 | 0.2603 | 0.220 | | | |
| 68 | 4000.00 | 0.220 | 164.27 | 167.00 | 0.00003709 | 0.00003772 | 2.68096 | —0.00324921 | 0.2866 | 0.220 | 0.2866 | 20.26 | 0.435 |
| | 1000.00 | 0.210 | | | | | 1.54003 | | | | | | |
| 69 | | | 44.82 | 131.00 | 0 00049729 | 0 00150231 | | | | | | | |
| | 1000.00 | 0.264 | | | | | 1.54051 | | | | | | |

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 70 | | | 136.39 | 97.00 | 0.00005373 | 0.00003820 | | | | | | | |
| | 1000.00 | 0.136 | | | | | 0.17781 | | | | | | |
| 71 | | | 82.00 | 77.00 | 0.00014884 | 0.00013961 | | | | | | | |
| | 1000.00 | 0.128 | | | | | 0.21163 | | | | | | |
| 72 | 8000.00 | 0.738 | 124.09 | 137.50 | 0.00006496 | 0.00007202 | 3.47008 | +0.00710239 | 0.4613 | 0.958 | 0.3945 | 27.89 | 1.000 |
| | 1000.00 | 0.002 | | | | | 0.10675 | | | | | | |
| 73 | | | 143.54 | 103.00 | 0.00004844 | 0.00003473 | | | | | | | |
| | 1000.00 | 0.015 | | | | | 0.18137 | | | | | | |
| 74 | | | 88.83 | 103.00 | 0.00012656 | 0.00014664 | | | | | | | |
| | 1000.00 | 0.078 | | | | | 0.21454 | | | | | | |
| 75 | | | 99.24 | 66.50 | 0.00010140 | 0.00006790 | | | | | | | |
| | 1000.00 | 0.030 | | | | | 0.16213 | | | | | | |
| 76 | 12000.00 | 0.125 | 90.23 | 69.50 | 0.00012254 | 0.00009423 | 0.66479 | +0.01467369 | 0.4289 | 1.083 | 0.3978 | 28.13 | 1.110 |
| | 1000.00 | 0.260 | | | | | 0.21538 | | | | | | |
| 77 | | | 84.97 | 74.50 | 0.00013830 | 0.00012115 | | | | | | | |
| | 1000.00 | 0.052 | | | | | 0.14018 | | | | | | |
| 78 | | | 180.40 | 112.00 | 0.00003069 | 0.00001903 | | | | | | | |
| | 1000.00 | 0.171 | | | | | 1.59849 | | | | | | |
| 79 | | | 44.77 | 142.50 | 0.00049729 | 0.00157946 | | | | | | | |
| | 1000.00 | 0.347 | | | | | 2.04634 | | | | | | |
| 80 | 16000.00 | 0.810 | 55.86 | 81.50 | 0.00032041 | 0.00046688 | 4.00039 | +0.05042519 | 0.4516 | 1.913 | 0.4192 | 29.64 | 1.769 |

4. Application relative à une partie de la Moselle, comprise entre les divisions métriques 39.600 et 39.800.

Nous trouvons encore, dans le cours de M. Minard, les résultats des opérations faites sur une partie de la Moselle, comprise entre deux digues de rétrécissement sur une longueur de 207m.00; l'application de la formule à ces données fait trouver, pour la valeur de la norme, le nombre de 0.39767 pour les deux premières sections, et celui de 0.4366 pour les cinq sections prises ensemble; en admettant ce dernier nombre, on trouve que le débit, dans cette partie de la Moselle, devait être de 30m.87 au moment des opérations; d'après M. Minard, le débit jaugé était de 30m.53.

| Nos des sections. | Quantités mesurées. | | | | Quantités calculées, les sections étant prises 2 par 2. | | | | | Pente absolue mesurée $\Sigma_0{}^n\Delta H$ | Quantités calculées, les sections étant prises ensemble. | | Pente absolue calculée, le débit étant de 30m87 $\Sigma_0{}^n\Delta H$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Distances partielles $\Delta l$ | Pentes partielles $\Delta H$ | Aires des sections $\omega$ | Périmètres des sections $\chi$ | $\frac{1}{\omega^2}$ | $\frac{\chi}{\omega^3}$ | $\Delta l\left(\frac{\chi_0}{\omega_0{}^3}+\frac{\chi_1}{\omega_1{}^3}\right)$ | $\frac{2}{a}\left(\frac{1}{\omega_1{}^2}-\frac{1}{\omega_0{}^2}\right)$ | Valeur de la norme $N=Q\sqrt{\frac{a}{4g}}$ | | Valeur de la norme N | Débit calculé Q | |
| 1 | | | 31.25 | 30.50 | 0.00102400 | 0.00097682 | | | | | | | |
| | 51.75 | 0.017 | | | | | 0.0964620 | —0.0096839 | 0.4425 | 0.017 | 0 4425 | 32.29 | 0.0165 |
| 2 | | | 31.80 | 28.70 | 0.00098596 | 0.00088338 | | | | | | | |
| | 51.25 | 0.007 | | | | | 0.0856387 | —0.0206420 | 0.3280 | 0.024 | 0.3976 | 28.11 | 0.0299 |
| 3 | | | 33.24 | 28.77 | 0.00090480 | 0.00078265 | | | | | | | |
| | 52.00 | 0.022 | | | | | 0.0734760 | —0.0307887 | 0.7177 | 0.046 | 0.4863 | 34.38 | 0.0370 |
| 4 | | | 35.72 | 28.73 | 0.00078400 | 0.00063033 | | | | | | | |
| | 52.01 | 0.007 | | | | | 0.0691184 | +0.0145259 | 0.3579 | 0.053 | 0.4366 | 30.87 | 0.0530 |
| 5 | | | 34.48 | 28.67 | 0.00084100 | 0.00069887 | | | | | | | |
| | 207.00 | 0.053 | | | | | | | | | | | |

On trouve aussi, dans l'ouvrage de M. Minard, les résultats de quelques opérations faites sur une autre partie de la Moselle, près de Thionville, et sur deux parties de la Meuse; malheureusement on a substitué aux sections réelles des valeurs moyennes; les données de la nature étant ainsi altérées, on ne peut en faire usage que sous peine d'arriver à des résultats inexacts.

## N° IV.

**Table pour faciliter l'application des formules d'hydraulique aux questions relatives aux fleuves et rivières.**

| 1re, 2e et 3e puissances des nombres entiers de 0 à 100. | | | 1re, 2e et 3e puissances du rapport $\frac{1}{\omega}$, $\omega$ étant un nombre entier compris entre 0 et 100. | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\omega$ | $\omega^2$ | $\omega^3$ | $\frac{1}{\omega}$ | $\frac{1}{\omega^2}$ | $\frac{1}{\omega^3}$ |
| 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.0000 | 1.000000 | 1.00000000 |
| 2.00 | 4.00 | 8.00 | 0.5000 | 0.250000 | 0.12500000 |
| 3.00 | 9.00 | 27.00 | 0.3300 | 0.111100 | 0.03703700 |
| 4.00 | 16.00 | 64.00 | 0.2500 | 0.062500 | 0.01562600 |
| 5.00 | 25.00 | 125.00 | 0.2000 | 0.040000 | 0.00800000 |
| 6.00 | 36.00 | 216.00 | 0.1660 | 0.027777 | 0.00462960 |
| 7.00 | 49.00 | 343.00 | 0 1430 | 0.020408 | 0.00291540 |
| 8.00 | 64.00 | 512.00 | 0.1250 | 0.015625 | 0.00195810 |
| 9.00 | 81.00 | 729.00 | 0.1110 | 0.012346 | 0.00137170 |
| 10.00 | 100.00 | 1000.00 | 0.1000 | 0.010000 | 0.00100000 |
| 11.00 | 121.00 | 1331.00 | 0.0909 | 0.008264 | 0.00075130 |
| 12.00 | 144.00 | 1728.00 | 0.0833 | 0.006944 | 0.00057870 |
| 13.00 | 169.00 | 2197.00 | 0.0769 | 0.005917 | 0.00045517 |
| 14.00 | 196.00 | 2744.00 | 0.0714 | 0.005102 | 0.00036443 |
| 15.00 | 225.00 | 3375.00 | 0.0666 | 0.004444 | 0.00029629 |
| 16.00 | 256.00 | 4096.00 | 0.0625 | 0.003906 | 0.00024414 |
| 17.00 | 289.00 | 4913.00 | 0.0588 | 0.003460 | 0.00020354 |
| 18.00 | 324.00 | 5832.00 | 0.0555 | 0.003086 | 0.00017147 |
| 19.00 | 361.00 | 6859.00 | 0.0526 | 0.002770 | 0.00014579 |
| 20.00 | 400.00 | 8000.00 | 0.0500 | 0.002500 | 0 00012500 |
| 21.00 | 441.00 | 9261.00 | 0.0477 | 0.002267 | 0.00010798 |
| 22.00 | 484.00 | 10648.00 | 0.0454 | 0.002066 | 0.00009391 |
| 23.00 | 529.00 | 12167.00 | 0.0436 | 0.001890 | 0.00008219 |
| 24.00 | 576.00 | 13824.00 | 0.0416 | 0.001736 | 0.00007234 |
| 25 00 | 625.00 | 15625.00 | 0.0400 | 0.001600 | 0.00006400 |
| 26.00 | 676.00 | 17576.00 | 0.0384 | 0.001479 | 0.00005989 |
| 27.00 | 729.00 | 19683.00 | 0.0370 | 0.001371 | 0.00005080 |
| 28.00 | 784.00 | 21952.00 | 0.0357 | 0.001275 | 0.00004555 |
| 29.00 | 841.00 | 24389.00 | 0.0345 | 0.001189 | 0.00004100 |
| 30.00 | 900,00 | 27000,00 | 0,0333 | 0,001111 | 0.00003704 |

| 1re, 2e et 3e puissances des nombres entiers de 0 à 100. | | | 1re, 2e et 3e puissances du rapport $\frac{1}{\omega}$, $\omega$ étant un nombre entier compris entre 0 et 100. | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\omega$ | $\omega^2$ | $\omega^3$ | $\frac{1}{\omega}$ | $\frac{1}{\omega^2}$ | $\frac{1}{\omega^3}$ |
| 31 00 | 961.00 | 29791.00 | 0.0322 | 0 001040 | 0.00003357 |
| 32.00 | 1024.00 | 32768.00 | 0.03125 | 0.000976 | 0.00003052 |
| 33.00 | 1089.00 | 35937.00 | 0.0302 | 0.000918 | 0.00002782 |
| 34.00 | 1156.00 | 39304.00 | 0.0294 | 0 000865 | 0.00002544 |
| 35.00 | 1225.00 | 42875.00 | 0.0286 | 0.000816 | 0.00002332 |
| 36 00 | 1296.00 | 46656.00 | 0.0277 | 0.000771 | 0.00002143 |
| 37.00 | 1369.00 | 50653.00 | 0.0270 | 0.000730 | 0.00001974 |
| 38.00 | 1444.00 | 54872.00 | 0.0263 | 0.000692 | 0.00001822 |
| 39.00 | 1521.00 | 59319.00 | 0.0256 | 0.000657 | 0.00001686 |
| 40.00 | 1600.00 | 64000.00 | 0.0250 | 0.000625 | 0.00001562 |
| 41.00 | 1681.00 | 68921.00 | 0.0244 | 0.000594 | 0.00001451 |
| 42.00 | 1764.00 | 74088.00 | 0.0238 | 0.000566 | 0.00001350 |
| 43.00 | 1849.00 | 79507 00 | 0.0232 | 0.000540 | 0.00001258 |
| 44.00 | 1936.00 | 85184.00 | 0.0227 | 0.000516 | 0.00001174 |
| 45.00 | 2025.00 | 91125.00 | 0.0222 | 0.000493 | 0.00001097 |
| 46.00 | 2116.00 | 97336.00 | 0.0218 | 0.000472 | 0.00001027 |
| 47.00 | 2209.00 | 103823.00 | 0.0212 | 0.000452 | 0.000009632 |
| 48.00 | 2304.00 | 110592.00 | 0.0208 | 0.000434 | 0.000009042 |
| 49.00 | 2401.00 | 117649.00 | 0.0204 | 0.000416 | 0.000008500 |
| 50 00 | 2500.00 | 125000.00 | 0.0200 | 0.000400 | 0.000008000 |
| 51.00 | 2601.00 | 132651.00 | 0.0196 | 0.0003845 | 0.000007538 |
| 52.00 | 2704.00 | 140608.00 | 0.0192 | 0.0003698 | 0.000007112 |
| 53.00 | 2809.00 | 148877.00 | 0.0189 | 0.0003560 | 0.000006717 |
| 54.00 | 2916.00 | 157464.00 | 0.0185 | 0.0003429 | 0.000006350 |
| 55.00 | 3025.00 | 166375.00 | 0.0182 | 0.0003306 | 0.000006010 |
| 56.00 | 3136.00 | 175616.00 | 0.0178 | 0.0003189 | 0.000005694 |
| 57.00 | 3249.00 | 185193.00 | 0.0175 | 0.0003078 | 0.000005400 |
| 58.00 | 3364.00 | 195112.00 | 0.0172 | 0.0002973 | 0.000005125 |
| 59.00 | 3481.00 | 205379.00 | 0.0169 | 0.0002873 | 0.000004869 |
| 60.00 | 3600.00 | 216000.00 | 0.0166 | 0.0002778 | 0.000004630 |
| 61.00 | 3721.00 | 226981.00 | 0.0164 | 0.0002687 | 0.000004406 |
| 62.00 | 3844.00 | 238328.00 | 0.0161 | 0.0002601 | 0.000004196 |
| 63.00 | 3969.00 | 250047.00 | 0.0159 | 0.0002519 | 0.000003999 |
| 64.00 | 4096.00 | 262144.00 | 0.0156 | 0.0002441 | 0.000003815 |
| 65.00 | 4225.00 | 274625.00 | 0.0154 | 0.0002367 | 0.000003641 |
| 66.00 | 4356.00 | 287496.00 | 0.0151 | 0.0002296 | 0.000003478 |
| 67.00 | 4489.00 | 300763.00 | 0.0149 | 0.0002228 | 0.000003325 |
| 68.00 | 4624.00 | 314432.00 | 0.0147 | 0.0002163 | 0.000003180 |
| 69 00 | 4761.00 | 328509.00 | 0.0145 | 0.0002104 | 0.000003044 |
| 70.00 | 4900.00 | 343000.00 | 0.0143 | 0.0002041 | 0.000002915 |

| 1re, 2e et 3e puissances des nombres entiers de 0 à 100. | | | 1re, 2e et 3e puissances du rapport $\frac{1}{\omega}$, $\omega$ étant un nombre entier compris entre 0 et 100. | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\omega$ | $\omega^2$ | $\omega^3$ | $\frac{1}{\omega}$ | $\frac{1}{\omega^2}$ | $\frac{1}{\omega^3}$ |
| 71.00 | 5041.00 | 357911.00 | 0.0141 | 0.0001984 | 0.000002794 |
| 72.00 | 5184.00 | 373248.00 | 0.0139 | 0.0001929 | 0.000002679 |
| 73.00 | 5329.00 | 389017.00 | 0.0137 | 0.0001876 | 0.000002570 |
| 74.00 | 5476.00 | 405224.00 | 0.0135 | 0.0001826 | 0.000002468 |
| 75.00 | 5625.00 | 421875.00 | 0.0133 | 0.0001778 | 0.000002371 |
| 76 00 | 5776.00 | 438976.00 | 0.0132 | 0.0001731 | 0.000002278 |
| 77.00 | 5929.00 | 456533 00 | 0.0130 | 0.0001687 | 0.000002190 |
| 78.00 | 6084.00 | 474552.00 | 0.0128 | 0.0001644 | 0.000002107 |
| 79.00 | 6241.00 | 493039.00 | 0.0126 | 0.0001602 | 0.000002028 |
| 80.00 | 6400.00 | 512000.00 | 0.0125 | 0.0001562 | 0.000001953 |
| 81.00 | 6561.00 | 531441.00 | 0.0123 | 0.0001524 | 0.000001882 |
| 82.00 | 6724.00 | 551368.00 | 0.0122 | 0.0001487 | 0.000001814 |
| 83.00 | 6889.00 | 571787.00 | 0.0120 | 0.0001451 | 0.000001749 |
| 84.00 | 7056.00 | 592704.00 | 0.0119 | 0.0001417 | 0.000001687 |
| 85.00 | 7225.00 | 614125.00 | 0.0117 | 0.0001384 | 0.000001628 |
| 86.00 | 7396.00 | 636056.00 | 0.0116 | 0.0001352 | 0.000001572 |
| 87.00 | 7569 00 | 658503.00 | 0.0115 | 0 0001321 | 0.000001519 |
| 88.00 | 7744.00 | 681472.00 | 0.0114 | 0.0001291 | 0.000001467 |
| 89.00 | 7921.00 | 704969.00 | 0.0112 | 0.0001262 | 0.000001418 |
| 90.00 | 8100.00 | 729000.00 | 0.0111 | 0.0001234 | 0.000001372 |
| 91.00 | 8281.00 | 753571.00 | 0.0110 | 0.0001207 | 0.000001327 |
| 92.00 | 8464.00 | 778688.00 | 0 0109 | 0.0001181 | 0.000001284 |
| 93 00 | 8649.00 | 804357.00 | 0.0107 | 0.0001156 | 0.000001243 |
| 94.00 | 8836.00 | 830584.00 | 0.0106 | 0.0001132 | 0.000001204 |
| 95.00 | 9025.00 | 857375.00 | 0.0105 | 0.0001108 | 0.000001166 |
| 96.00 | 9216.00 | 884736.00 | 0.0104 | 0.0001085 | 0.000001130 |
| 97.00 | 9409.00 | 912673.00 | 0.0103 | 0.0001063 | 0.000001096 |
| 98.00 | 9604.00 | 941192.00 | 0.0102 | 0.0001041 | 0.000001062 |
| 99.00 | 9801.00 | 970299.00 | 0.0101 | 0.0001020 | 0.000001030 |
| 100.00 | 10000.00 | 1000000.00 | 0.0100 | 0.0001000 | 0.000001000 |

Cette table est destinée à faciliter les calculs des formules de l'hydraulique, dans les questions relatives au mouvement des eaux courantes; pour en comprendre l'utilité il faut se rappeler qu'en appelant $\omega$ l'aire d'une section quelconque, $\chi$ son contour, $u$ la vitesse moyenne correspondante, $h$ la

hauteur due à cette vitesse, Q le volume que débite le courant dans l'unité de temps, on a $u=\frac{Q}{\omega}=Q\times\frac{1}{\omega}$, $h=\frac{u^2}{2g}=\frac{Q^2}{2g}\times\frac{1}{\omega^2}$, enfin que l'inclinaison de la ligne des résistances a pour expression $\frac{a\chi h}{\omega}=\frac{aQ^2\chi}{2g}\times\frac{1}{\omega^3}$; comme l'aire $\omega$ de la section, que l'on obtient facilement par des mesures directes, est fréquemment une des données de la question; la table précédente en donnant $\frac{1}{\omega}$, $\frac{1}{\omega^2}$ et $\frac{1}{\omega^3}$ fera connaître la vitesse, la hauteur due à la vitesse et même la pente de la ligne des résistances lorsque le débit sera donné.

On a constamment besoin du rapport $\frac{\chi}{\omega^3}$; pour le déterminer il suffira de multiplier le contour $\chi$ par le nombre $\frac{1}{\omega^3}$ qui se trouve dans la table.

## N° V.

**Supplément au n° 224, sur la détermination du coefficient de réduction $m$, lorsqu'un liquide s'écoule par un orifice percé dans une paroi plane et mince.**

Dans le n° 224, nous avons déterminé la valeur du coefficient de réduction $m$, lorsque la hauteur de la charge est considérable par rapport à celle de l'orifice, et en supposant cet orifice percé dans une paroi plane et mince.

Pour obtenir cette valeur, nous avons fait observer que, quand l'orifice est vertical la quantité de mouvement que possède le liquide au passage de l'orifice devait être égale à celle qu'il possède au passage de la section contractée; en effet, l'axe de la veine étant horizontal entre les deux sections, et la pression qui résulte de la charge, étant la seule force qui agisse sur le liquide, les actions mutuelles des filets les uns sur les autres ne pouvaient que modifier la direction de la vitesse sans altérer son intensité. Lorsque le mouvement est permanent, ou lorsque le niveau du réservoir ne varie pas sensiblement avec le temps, la propriété fondamentale de ce mouvement, dont l'expression analytique est $u\omega = Q$, donne un moyen encore plus facile d'obtenir la valeur du coefficient de réduction $m$, ainsi que nous allons le faire voir dans ce qui suit :

Pour plus de simplicité, supposons que l'orifice soit vertical et circulaire; désignons :

Par 2L le diamètre de l'orifice;

Par $2l$ celui de la section contractée;

Par $\alpha$ l'angle de l'un des filets avec l'axe de la veine;

Par $h$ la hauteur de la charge sur le centre de l'orifice;

Par V la vitesse due à cette hauteur;

Par $u$ la vitesse moyenne au passage de l'orifice;

Par $v$ la composante parallèle à l'axe de l'un des filets de la veine.

La propriété fondamentale du mouvement permanent donnera d'abord $\pi L^2 u = \pi l^2 V$, d'où $\frac{u}{V} = \frac{l^2}{L^2} = m$ et $l = L\sqrt{m}$.

Si nous imaginons la surface sphérique ayant même centre et même rayon que l'orifice, la hauteur $h$ de la charge étant très-grande par rapport au rayon L, tous les filets convergeront vers le centre de l'orifice ou seront normaux à la surface sphérique dont nous venons de parler. De plus la veine formant un solide de révolution autour de son axe, il suffira de considérer ce qui se passe dans l'un des plans méridiens ; or, si $dr$ est la largeur de l'un des filets à son passage par l'orifice, $vdr$ sera la section par le plan méridien, du volume débité par ce filet dans l'unité de temps, et la section du volume débité par l'orifice entier aura pour expression $2\int vdr$; comme cette section devra être égale à celle du volume débité par la section contractée, on devra avoir $2\int vdr = 2l\mathrm{V}$.

Si $ds$ est l'élément du grand cercle de la sphère dont la projection sur le diamètre est $dr$, on aura $dr = ds\cos\alpha$; comme $ds$ est d'ailleurs égal à $\mathrm{L}d\alpha$, il en résulte que l'on a $dr = \mathrm{L}\cos\alpha d\alpha$.

D'un autre côté tous les filets à la rencontre de la surface sphérique étant animés de la vitesse V due à la hauteur de la charge ; la composante $v$ de cette vitesse dans le sens de l'axe ou perpendiculairement au plan de l'orifice, sera égale à $\mathrm{V}\cos\alpha$ ; on aura donc $\int vdr = \mathrm{LV}\int\cos^2\alpha d\alpha = l\mathrm{V}$ ou $l = \mathrm{L}\int\cos^2\alpha d\alpha$; or, la valeur de l'intégrale $\int\cos^2\alpha d\alpha$ prise entre les limites convenables est égale à $\frac{\pi}{4}$, on a donc $l = \frac{\pi}{4}\mathrm{L}$. Nous avons trouvé ci-dessus $l = \mathrm{L}\sqrt{m}$; il faut donc que l'on ait $m = \frac{\pi^2}{16} = 0.616$.

Si l'orifice étant toujours très-petit par rapport à la hauteur de la charge, le mouvement cessait d'être permanent, on aurait alors $\pi\mathrm{L}^2 u dt = \pi l^2 \mathrm{V} dt$, et encore $\frac{u}{\mathrm{V}} = \frac{l^2}{\mathrm{L}^2}$, puis $l = \mathrm{L}\int\cos^2\alpha d\alpha$, en sorte que le coefficient $m = \frac{\pi^2}{16}$ convient quel que soit le mode de l'écoulement, pourvu que la hauteur de la charge soit très-grande, par rapport à celle de l'orifice.

## N° VI.

**Supplément au n° 64, sur la valeur des coefficients $\alpha$ et $\alpha'$ des équations $\int v^2 d\omega = \alpha\omega u^2$ et $\int v^3 d\omega = \alpha'\omega u^3$, lorsque la section du courant a une largeur indéfinie, et sur la forme d'une veine liquide verticale.**

1. Nous avons vu, dans le n° 64, que les valeurs des coefficients $\alpha$ et $\alpha'$ étaient sans importance dans les applications usuelles, et que l'on pouvait, sans crainte d'erreur, considérer l'un et l'autre comme égal à l'unité; cependant nous croyons qu'il peut être utile, sous le rapport théorique, de donner les moyens de déterminer les valeurs de ces coefficients, lorsque le courant a une largeur indéfinie et une profondeur constante.

Dans le n° 92, nous avons trouvé pour la vitesse d'un des points situés sur une même verticale de la section $v = V - \frac{jz^2}{2}$; V étant la vitesse à la surface et $z$ la profondeur à laquelle se trouve le point considéré; et pour la vitesse moyenne $u = V - \frac{jh^2}{6}$, $h$ étant la hauteur de l'eau sur le fond.

Nous allons appliquer ces résultats à la recherche des valeurs des coefficients $\alpha$ et $\alpha'$ des équations $\int v^2 dz = \alpha\omega u^2$ et $\int v^3 dz = \alpha'\omega u^3$. Si, dans l'expression $\int v^2 dz$, nous remplaçons $v$ par sa valeur $V - \frac{j}{2}z^2$, nous aurons

$$\int v^2 dz = \int_0^h \left(V^2 - Vjz^2 + \frac{j^2 z^4}{4}\right) dz;$$

effectuant l'intégration depuis $z = o$ jusqu'à $z = h$, nous aurons $\int v^2 dz = V^2 h - \frac{Vjh^3}{3} + \frac{j^2 h^5}{4 \times 5}$; mais $\frac{jh^2}{2} = 3(V - u)$, on a donc $\frac{j^2 h^4}{4} = 9(V - u)^2$, et même $\frac{j^3 h^6}{8} = 27(V - u)^3$, substi-

tuant dans l'équation précédente, nous aurons

$$\int v^2 dz = u^2 h\left(\frac{V^2}{u^2} - \frac{2V}{u}\left(\frac{V}{u} - 1\right) + \frac{9}{5}\left(\frac{V}{u} - 1\right)^2\right).$$

L'identité $\frac{V}{u} - \left(\frac{V}{u} - 1\right) = 1 = \left(\frac{V}{u} - \left(\frac{V}{u} - 1\right)\right)^m$, donnant $\frac{V^2}{u^2} - \frac{2V}{u}\left(\frac{V}{u} - 1\right) = 1 - \left(\frac{V}{u} - 1\right)^2$, il en résulte que

$$\int v^2 dz = u^2 h\left(1 + \frac{4}{5}\left(\frac{V}{u} - 1\right)^2\right) = \alpha u^2 h,$$

d'où $\alpha = 1 + \frac{4}{5}\left(\frac{V}{u} - 1\right)^2$, ce qui fait voir que $\alpha - 1$ diminue quand la vitesse moyenne augmente et justifie l'observation faite par M. Vauthier. Lorsque $u = 0.80V$, on trouve alors $\alpha = 1.05$.

Nous opérerons d'une manière analogue pour trouver la valeur de $\alpha'$ et nous écrirons

$$\alpha' u^3 h = \int v^3 dz = \int \left(V - \frac{jz^2}{2}\right)^3 dz = \int_0^h \left(V^3 - \frac{3V^2 jz^2}{2} + \frac{3Vj^2 z^4}{4} - \frac{j^3 z^6}{8}\right) dz,$$

effectuant l'intégration depuis $z = o$ jusqu'à $z = h$, nous obtiendrons $\int v^3 dz = h\left(V^3 - V^2\frac{jh^2}{2} + \frac{3V}{5} \times \frac{j^2h^4}{4} - \frac{1}{7}\frac{j^3h^6}{8}\right)$, remplaçant $\frac{jh^2}{2}$, $\frac{j^2h^4}{4}$, $\frac{j^3h^6}{8}$ par $3(V - u)$, $9(V - u)^2$ et $27(V - u)^3$, nous aurons

$$\int v^3 dz = u^3 h\left(\frac{V^3}{u^3} - \frac{3V^2}{u^2} \times \left(\frac{V}{u} - 1\right) + \frac{27V}{5u}\left(\frac{V}{u} - 1\right)^2 - \frac{27}{7}\left(\frac{V}{u} - 1\right)^3\right);$$

l'identité $\left(\frac{V}{u} - \left(\frac{V}{u} - 1\right)\right)^m = 1$ donne ensuite :

$$\frac{V^3}{u^3} - \frac{3V^2}{u^2}\left(\frac{V}{u} - 1\right) = 1 - \frac{3V}{u}\left(\frac{V}{u} - 1\right)^2 + \left(\frac{V}{u} - 1\right)^3,$$

substituant, il viendra :

$$\int v^3 dz = u^3 h\left(1 + \frac{12}{5}\left(\frac{V}{u} - 1\right)^2 \frac{V}{u} - \frac{20}{7}\left(\frac{V}{u} - 1\right)^3\right) = u^3 h\left(1 + \frac{4}{35}\left(\frac{V}{u} - 1\right)^2\left(25 - 4\frac{V}{u}\right)\right) = \alpha' u^3 h,$$

d'où $\alpha' = 1 + 0.114\left(25 - \frac{4V}{u}\right)\left(\frac{V}{u} - 1\right)^2$, le rapport exact de $\frac{\alpha' - 1}{\alpha - 1}$ est donc égal à $\frac{4}{7}\left(25 - \frac{4V}{u}\right)$, et, lorsque $u = 0.80V$, on trouve $\alpha' = 1.142$, valeur qui ne diffère pas sensiblement de $1 + 3(\alpha - 1)$.

La vitesse moyenne $u$ acquiert sa plus grande valeur lorsque la vitesse au fond est nulle, cette valeur étant alors $u = \frac{2}{3}V$, il en résulte que la plus grande valeur du rapport $\frac{V}{u}$ est $\frac{3}{2}$ ou 1.50, par conséquent la plus grande valeur que puisse avoir le coefficient $\alpha$ est $\alpha = 0.20$, et celle du coefficient $\alpha'$ est $\alpha' = 1.65$; mais la vitesse au fond ne pouvant être nulle que dans des circonstances purement spéculatives, on doit considérer les valeurs précédentes comme deux limites dont $\alpha$ et $\alpha'$ pourront approcher sans jamais les atteindre.

2. Pour compléter ce qui est relatif à l'écoulement de l'eau par un orifice, proposons-nous de déterminer la forme d'une veine verticale qui sort par une ouverture horizontale et évasée.

Nous avons vu n° 58, que le mouvement d'une veine fluide dont tous les points d'une même section sont animés d'une vitesse commune, suit la loi de la chute des corps graves, c'est-à-dire que la vitesse $u$ d'une section quelconque située à une hauteur H, au-dessous du niveau constant d'un réservoir, est telle que l'on a $u^2 = 2gH$.

La propriété fondamentale du mouvement permanent $u\omega = Q$ donnant $u^2 = \frac{Q^2}{\omega^2}$, il en résulte que l'on a $2gH = \frac{Q^2}{\omega^2}$; si la section de la veine est un cercle dont le rayon soit R, on aura $2gH = \frac{Q^2}{\pi^2 R^4}$ et par suite $R^4 H = \frac{Q^2}{2g\pi^2}$. Le second membre de cette équation étant constant, la relation entre le rayon R et la hauteur H, est celle qui convient aux coor-

données d'une hyperbole du quatrième degré ayant pour asymptote l'axe verticale de la veine. La courbe dont il vient d'être question est susceptible d'avoir une seconde asymptote qui corresponde au niveau de l'eau; mais, dans la question qui nous occupe, cette ligne est sans importance; car la section de l'orifice évasée devant se trouver à une hauteur donnée au-dessous du niveau de l'eau, le rayon de cette section détermine le premier point de la courbe.

# TABLE ANALYTIQUE

## DES MATIÈRES.


| Numéro. | | Pages. |
|---|---|---|
| | AVANT-PROPOS | 1 |
| | INTRODUCTION | 9 |
| 1 | Objet de cette introduction | 9 |
| | *I. Des courants considérés comme sources de richesse* | 10 |
| 2 | Avantages qu'ils peuvent procurer à l'agriculture, à l'industrie, au commerce | 10 |
| 3 | Les courants qui, convenablement réglés, peuvent être la source de tant de richesses, causent parfois de grands désastres. | 12 |
| | *II. Des vallées, des courants et des pluies* | 13 |
| 4 | Loi d'équilibre à laquelle tout est soumis dans la nature | 13 |
| 5 | Des vallées et de leur étendue | 13 |
| 6 | Pente des vallées | 15 |
| 7 | Grosseur des matières qui constituent le fond des vallées | 15 |
| 8 | Des courants et de leur lit | 15 |
| 9 | Des pluies | 16 |
| 10 | Partage des eaux pluviales après leur chute | 17 |
| 11 | Des pluies qui tombent sur les pays de montagnes | 17 |
| 12 | Des pluies qui tombent sur les pays de plaines | 17 |
| 13 | Effets des pluies ralativement aux courants | 18 |
| | *III. Des courants à grande vitesse et à crue subite* | 19 |
| 14 | Différents genres des courants à grande vitesse | 19 |
| | (1) *Des torrents* | 19 |
| 15 | Pente des torrents, vitesse excessive de ces courants | 19 |
| 16 | Le résultat de l'action d'un torrent est le creusement d'une gorge, l'ouverture d'un vallon | 20 |
| 17 | Le lit des torrents présente trois régions distinctes; la première est celle où les eaux s'amassent, la seconde est le canal d'écoulement creusé dans la montagne, la troisième est le lit de | |

déjection où le torrent dépose les matières qu'il a enlevées à la montagne..... 20
18 Des causes qui provoquent la crue des torrents..... 22
19 Effets qui précèdent, accompagnent et suivent la crue d'un torrent..... 22
20 Les torrents des Hautes-Alpes sont ceux qui causent le plus de ravages..... 22
21 Les ravages dans les Hautes-Alpes sont principalement dus au peu de consistance du sol..... 23
22 Des moyens de défense à employer contre l'action dévastatrice des torrents..... 23
23 Les semis et les plantations sont les premiers moyens à employer..... 24
24 Circonstance favorable à l'endiguement..... 25
(2) *Des torrents rivières et des rivières torrentielles* ..... 25
25 Pente de ces courants, étendue de leur cours, largeur de leur lit..... 25
26 Moyen à employer pour diminuer les désastres causés par le nombre et l'abondance des crues..... 26
*IV. Des courants à faible vitesse et des courants à faible débit*..... 27
27 Des fleuves, des rivières et des ruisseaux..... 27
28 Du bassin des rivières, de celui des fleuves et même de celui des ruisseaux..... 28
29 De la relation qui existe entre l'étendue du bassin d'une rivière et le volume d'eau qu'elle débite..... 29
30 Pente générale du lit des rivières..... 29
31 Indice des crues..... 30
32 Des crues des rivières..... 30
33 Effet du défrichement et du déboisement, relativement aux crues des rivières..... 31
34 Hauteur et durée des crues..... 31
35 De la plus grande hauteur des crues, et du concours nécessaire des crues des affluents pour qu'elle se produise..... 32
36 Effets des plantations dans les vallées sur la hauteur des crues. 33
37 Du débit d'une rivière, de sa variation annuelle et des différents états de permanence du courant..... 34
38 Des lits qui correspondent aux différents états de permanence. 35
39 De la section du lit des rivières..... 35
40 Ce que l'on entend par le régime d'une rivière..... 37

41 Des circonstances qui concourrent à priver le lit des rivières de toute stabilité..... 38
42 Relation entre la vitesse, la pente et la grosseur des matières charriées par les eaux des rivières..... 39
43 Des rivières à fond de gravier, des rivières à fond de sable et de celles à fond de vase..... 40
44 De la superficie des eaux des rivières pendant l'étiage..... 41
45 Du fond du lit des rivières et des variations qu'il peut éprouver. 43
46 Des sinuosités du cours des rivières..... 45
47 Formation des anses..... 46
48 Dépôts qui se forment à l'embouchure des fleuves..... 47

*V. Des ouvrages et des travaux dont l'objet et de donner un régime aux rivières ou d'améliorer celui qu'elles ont.* 48

49 Principaux objets des ouvrages à établir sur le fond des vallées et dans le lit des rivières..... 48
50 Effets nuisibles des inondations..... 50
51 Digues servant à limiter le champ des inondations..... 50
52 Effets nuisibles des barrages, moyens d'y remédier..... 51
53 Des barrages établis sur les ruisseaux ou petites rivières... 54
54 Effets nuisibles de ces barrages..... 55
55 Défenses des berges contre les corrosions..... 57
56 Retrécissement du lit pour faire disparaître les dépôts..... 58
57 Effets des rétrécissements..... 58
58 Des rivières que l'on peut rendre navigables au moyen de barrages..... 59
59 Des rivières que l'on ne peut rendre navigables et auxquelles il est avantageux de suppléer par un canal latéral..... 60
60 Des différentes parties du cours d'un fleuve considérées sous le rapport de la navigation..... 61
61 Des ouvrages à établir pour assurer et faciliter le passage des bateaux entre deux des bassins que les rivières présentent. 62
62 Du chenal d'étiage que l'on peut créer au moyen de digues submersibles..... 63
63 Propriété particulière dont jouissent les rivières à fond de vase. 64
64 Difficulté de remédier aux barres et dépôts qui se forment à l'embouchure des fleuves..... 65

*VI. Des avantages de l'hydraulique sous le rapport de son application aux rivières et aux fleuves*..... 66

65 Principales questions dont l'hydraulique rend la solution facile. 66

## TRAITÉ SUR LES MOTEURS. — SECONDE PARTIE.

### MOTEURS INANIMÉS OU AGENTS PHYSIQUES EMPLOYÉS COMME MOTEURS.


1 Des fluides..... 72
2 Des fluides élastiques et des liquides..... 72
3 Propriété fondamentale des fluides..... 73
4 L'hydrodynamique ne conduit pas à des résultats pratiques susceptibles d'application aux besoins des hommes et des sociétés. 73
5 Objet de l'hydraulique..... 73
6 Division de l'hydraulique..... 74
7 Division de l'hydraulique proprement dite..... 74
8 Division de la pneumatique..... 75


### LIVRE PRÉLIMINAIRE.


*Exposé sommaire des principes de mécanique nécessaires à l'intelligence de l'hydraulique*..... 75
9 Les notions élémentaires se trouvent dans la première partie. 75
10 Des systèmes de force en équilibre..... 76
11 Des systèmes de force équivalents..... 76
12 De la vitesse virtuelle..... 76
13 Du moment virtuel et de l'action élémentaire..... 77
14 Circonstance dans laquelle le moment virtuel est égal à l'action élémentaire..... 77
15 Des mouvements et de leur composition..... 77
16 Principes généraux de la mécanique..... 77
*I. Principe des vitesses virtuelles*..... 78
17 Principe général de statistique trouvé par induction..... 78
*II. Principe général de dynamique*..... 79
18 Le principe de d'Alembert change les questions de dynamique en questions de statique..... 79
19 Définition et démonstration du principe général de dynamique. 79
20 Les quantités de mouvement imprimées et les quantités de mouvement effectives, forment des systèmes équivalents..... 80
*III. Principe général de la conservation des forces vives.* 80
21 Enoncé du principe des forces vives..... 80
22 Démonstration de ce principe..... 81

23 Transformation de l'équation des forces vives..... 83
24 Enoncé qui résulte de la transformation précédente..... 83
25 Pour que le principe des forces vives soit applicable, il faut d'abord que les forces soit indépendantes du temps..... 84
26 Pour que ce principe soit applicable, il est encore nécessaire que les liaisons du système soient indépendantes du temps... 84
27 Application du principe des forces vives à un système de poids ou de points pesants..... 86
28 Pour que l'on puisse appliquer le principe des forces vives à un système de corps pesants, il est nécessaire que les poids restent constants ou qu'on en considère une même quantité.. 87
29 Application du principe des forces vives, lorsque les poids venant à varier, la somme de ceux que l'on considère reste constante..... 88
30 Application du principe des forces vives au mouvement des fluides..... 89
31 Le principe des forces vives cesse d'être applicable, lorsque les vitesses varient dans un temps très-court, de quantités finies en grandeur et en direction..... 90
32 Résumé du livre préliminaire..... 92

PREMIÈRE DIVISION. — HYDRAULIQUE PROPREMENT DITE.

SECTION PREMIÈRE. — *De l'eau considérée comme moteur simple.*

LIVRE PREMIER. — *Théorie générale de l'hydraulique.*

*I. Considérations générales*..... 94

33 Propriétés physiques de l'eau..... 94
34 Des principales circonstances dans lesquelles l'eau se présente à nous..... 95
35 Les rivières ou courants naturels sont des moteurs..... 96
36 Des courants à mouvement varié..... 97
37 Des courants à mouvement permanent..... 97
38 Des courants à mouvement uniforme..... 97
39 Les courants naturels passent successivement par différents états de permaneuce..... 98

*II. Des pressions qui agissent sur les liquides en mouvement.* 99

40 Des forces qui agissent sur un liquide en mouvement..... 99
41 Des différentes sortes de pressions auxquelles une masse liquide peut être soumise..... 100

42 Propriété générale des pressions extérieures..... 100
43 Mesure de la pression due à la pesanteur, et du centre des pressions..... 100
44 Des pressions dans les liquides en mouvement..... 102

*III. Théorie du mouvement varié d'une masse liquide continue*..... 103

45 Propriété fondamentale du mouvement des liquides..... 103
46 Expression analytique de la propriété fondamentale du mouvement varié..... 106
47 Equation différentielle du mouvement varié..... 107
48 Equations générales du mouvement varié..... 113
49 Equation du mouvement lorsque l'axe du canal ou tuyau est vertical..... 115
50 Equation du mouvement varié lorsque le liquide sort d'un vase par un orifice très-petit. — Vitesse de l'écoulement..... 115
51 Equation du mouvement varié, en ayant égard à la résistance due au frottement du liquide contre les parois..... 117

*IV. Théorie du mouvement permanent d'une masse liquide continue*..... 119

52 Expression analytique de la propriété fondamentale du mouvement permanent..... 119
53 Equations du mouvement permanent déduites de celles du mouvement varié..... 120
54 Application du principe des forces vives au mouvement permanent..... 121
55 Observations sur les vitesses virtuelles des sections extrêmes. 122
56 Equation du mouvement permanent lorsque l'on néglige la résistance due au frottement..... 123
57 Conséquences de l'équation du mouvement permanent..... 125
58 Le mouvement d'une veine fluide dont tous les points de chaque section sont animés d'une vitesse commune, suit la loi de la chute des graves..... 126
59 Les variations de la vitesse sont uniquement dues à la différence de niveau et à la différence des pressions des sections extrêmes..... 126
60 De la hauteur due à la vitesse lorsque l'eau sort d'un orifice vertical..... 128

61 Lorsque les pressions extérieures sont égales, les variations de la vitesse ne dépendent que de la pente absolue de la surface. 130
62 Equation du mouvement permanent lorsque la vitesse cesse d'être commune aux différents points de chaque section..... 130
63 Forme qu'affecte le terme relatif à la force vive lorsque la vitesse est variable..... 133
64 Expression de la quantité de mouvement et de la force vive lorsque les filets fluides restent parallèles en ayant des vitesses différentes... ..... 135
65 Expression de la quantité de mouvement et de la force vive lorsque les vitesses des différents points d'une section sont égales mais non parallèles..... 140
66 La quantité d'action absorbée par les résistances qui contrarient le mouvement d'un courant, dans une partie comprise entre deux sections déterminées, ne dépend que de ces deux sections et de leur différence de niveau.... ..... ... 142
67 Discussion de l'équation générale du mouvement permanent. 144
68 Pression exercée dans une section quelconque..... 147
69 Dans un courant découvert, lorsqu'on peut négliger la résistance due au frottement contre les parois, la hauteur due à la vitesse dans chaque section, ajoutée à la hauteur du niveau de cette section au-dessus d'un plan horizontal fixe, forme une somme constante..... 147
70 Ce que l'on doit entendre par *hauteur due au frottement*. La hauteur due au frotttement, entre deux sections d'un courant découvert, est égale à la différence de niveau entre les deux sections à laquelle il faut ajouter ou retrancher la différence entre les hauteurs dues aux vitesses..... 149
71 Perte de force vive qu'éprouve une masse liquide en mouvement, lorsque la section du lit ou canal, dans lequel elle se meut, subit un élargissement brusque..... ..... 151
72 Perte de force vive qu'éprouve une masse liquide en mouvement, lorsque la section du lit ou canal, dans lequel elle se meut, subit un brusque rétrécissement..... 156

*V. Méthodes d'interpolation et d'approximation*..... 158

73 Valeur approximative de la différence des ordonnées extrêmes d'un arc d'une courbure faible et continue, en fonction

de l'inclinaison des tangentes extrêmes et de la distance qui sépare les ordonnées..... 158
74 Théorème de Thomas Simpson..... 160
*VI. Observations générales et fin du premier livre*..... 163
75 163

LIVRE II. — *Mouvement permanent de l'eau dans les courants découverts.*

*I. De la mesure des différents éléments d'un courant permanent et principalement de la mesure de la vitesse et de celle du débit*..... 164
76 Des principaux éléments d'un courant permanent..... 164
77 Mesures du profil longitudinal, des sections transversales et de la pente de la surface..... 165
78 De la vitesse et du débit..... 165
79 La plus grande vitesse d'un courant dans son état normal est toujours à la surface..... 166
(1) *Mesure de la vitesse*..... 167
80 Mesure de la vitesse à la surface..... 167
81 Hydromètres servant à mesurer la vitesse à une profondeur quelconque..... 167
Pendule hydrométrique..... 168
Strom-Messer de Woltemann..... 169
(2) *Loi de variation de la vitesse*..... 171
82 Variation de la vitesse aux différents points d'une même section. 171
83 Loi de variation de la vitesse sur une même verticale..... 174
(3) *Mesure du débit des courants permanents*..... 175
84 Jaugeage des courants découverts..... 175
*II. Des forces et résistances auxquelles est soumis le mouvement de l'eau*..... 180
(1) *La gravité est la cause première du mouvement de l'eau*.. 180
85 La pente de la surface, dans les courants découverts, est la cause immédiate du mouvement de l'eau..... 180
86 Le courant dont le mouvement est uniforme et la section constante, est nécessairement permanent..... 180
87 Un courant dont la pente est constante n'a pas nécessairement un mouvement uniforme, son mouvement peut-être varié. 181

(2) *Des résistances qui s'opposent à l'accélération du mouvement de l'eau* ..... 182

88 Résistances de différentes natures qui contrarient le mouvement de l'eau ..... 182
89 Action de l'air sur la surface supérieure des courants ..... 183
90 De l'adhérence de l'eau contre les parois du lit et de son effet. 184
91 Action du frottement de la masse liquide sur l'enduit aqueux adhérent aux parois ..... 185
92 Résistance due à la cohésion ou à la viscosité du liquide... 186
93 L'action due au frottement contre les parois, et l'action due à la cohésion sont les causes principales qui s'opposent à l'accélération du mouvement ..... 194

(3) *Expression analytique de la résistance totale* ..... 195

94 Expression analytique de la résistance totale déduite des lois de la mécanique ..... 195
95 Considérations physiques sur le mouvement des liquides... 197
96 La résistance par unité de surface des parois du lit, dans les courants découverts, animée d'un mouvement uniforme, est proportionnelle à la quantité de mouvement du liquide ..... 199

(4) *Relation entre la pente, la hauteur due à la vitesse et le rayon moyen de la section d'un courant dont le mouvement est uniforme; conséquences de cette relation* ..... 202

97 Equation du mouvement uniforme dans les courants découverts ..... 202
98 Transformations et conséquences de l'équation du mouvement uniforme ..... 205

(5) *Valeur numérique du coefficient qui entre dans l'expression de la résistance* ..... 207

99 La valeur numérique du coefficient de la résistance est la conséquence des résultats des expériences publiées par M. de Prony. 207

(6) *De la section de moindre résistance dans les courants à lit régulier et à pente constante* ..... 210

100 La régularité du mouvement dans les courants à lit régulier et à pente constante, permet de donner à la section de leur lit une forme favorable au cours de l'eau ..... 210

101 De la section qui sous le même périmètre a la plus grande surface, ou qui pour la même surface a le moindre périmètre. 212
102 L'aire et le contour d'une section sont des fonctions de sa largeur et de sa profondeur..... 214
103 De la plus grande et de la plus petite valeur du rayon moyen. 216
104 Les courants à mouvement uniforme, dont la hauteur due à la vitesse est égale au rayon moyen, ont une pente constante égale à *a*..... 217

*III. Des courants permanents dont le mouvement n'est pas uniforme*..... 217

(1) *Equation du mouvement permanent dans les courants découverts*..... 217

105 Equation du mouvement permanent lorsqu'on fait abstraction de la résistance due au frottement contre les parois du lit. 217
106 Equation différentielle du mouvement permanent lorsque l'on a égard à la résistance due au frottement, équation aux différences qui résulte de la précédente..... 219
107 De la hauteur due aux résistances et de la ligne des résistances. 222
108 Des différentes lignes que peut présenter le profil longitudinal d'un courant, relations qui existent entre ces lignes.... 223

(2) *Discussion des équations différentielles*..... 227

109 Principaux résultats auxquels conduisent les équations différentielles..... 227
110 Du mouvement uniforme à pente constante et du mouvement uniforme à pente variée..... 229
111 Observations relatives à l'axe hydraulique et à la ligne des résistances..... 231
112 Conséquences du principe fondamental du mouvement permanent..... 234
113 Des propriétés caractéristiques qui peuvent résulter de la pente des courants, et de la forme de leur lit..... 241
114 Forme des sections dont le rayon moyen est constant..... 245
115 Formule des ingénieurs toscans pour calculer les débits du Pô. 246
116 Des causes accidentelles qui peuvent modifier la surface d'un courant, en retardant ou en accélérant son mouvement.. 247
117 Suite de la discussion des équations différentielles..... 251
118 Des principales propriétés qui résultent de la courbure de l'axe hydraulique..... 252

119 De la forme ou de la courbure de l'axe hydraulique lorsque le fond est horizontal..... 256
120 De la forme ou de la courbure de l'axe hydraulique, lorsque le lit du courant a une pente constante dans le sens du mouvement..... 258
121 De la forme ou de la courbure de l'axe hydraulique, lorsque le lit du courant a une pente constante en sens contraire du mouvement..... 261
122 Circonstances dans lesquelles il est possible d'intégrer l'équation différentielle de l'axe hydraulique..... 262

(3) *Des équations aux différences*..... 268

123 Principaux résultats auxquels conduisent les équations aux différences..... 268
124 Des ondulations que doit présenter la surface d'un courant dont le mouvement n'est pas uniforme..... 270
125 Observations relatives au profil longitudinal d'un courant.. 271
126 Modifications avantageuses dont sont susceptibles les équations aux différences..... 272
127 Observations sur les équations (1), (2) et (4), comparaison de résultats numériques obtenus par les équations (1) et (4).. 274
128 Propriétés des équations aux différences, lorsque le lit du courant a une pente constante..... 277
129 Des relèvements et des abaissements de la surface d'un courant, étendue sur laquelle ces modifications se font sentir.... 280
130 Courbe formée par l'axe hydraulique d'un courant, dont l'eau se déverse en passant sur le seuil d'un barrage, ou en tombant par une chute ou par une ouverture pratiquée dans le fond. 286

*IV. Des différents ordres de questions que peut faire naître le mouvement permanent de l'eau dans les courants découverts*..... 291

(1) *Considérations générales*..... 291

131 Le mouvement permanent de l'eau dans les courants découverts donne lieu à deux ordres de questions..... 291
132 Des questions du premier ordre, de celles qui résultent du mouvement de l'eau dans un courant dont le lit est invariable. 291
133 Des questions du deuxième ordre, de celles qui résultent du mouvement de l'eau dans un courant dont le lit éprouve quelques modifications ou présente certains accidents..... 292

134 Des modifications que peut éprouver le lit d'un courant et du nombre des questions auxquelles ces modifications peuvent donner lieu : 1° lorsque ces modifications ont une faible étendue. 293
135 2° Lorsque les modifications ont une étendue considérable.. 295
136 Des relèvements et des abaissements de la surface d'un courant, causés par les modifications qu'éprouve le lit de ce courant. 296

(2) *Questions du premier ordre dans les courants à lit régulier et à pente constante*..... 297

137 Solution générale des questions du premier ordre sur le mouvement uniforme..... 297
138 Première application, la pente étant à déterminer..... 299
139 Deuxième application, la section étant à déterminer..... 300
140 Troisième application, le débit étant à déterminer..... 301
141 Courants dont le mouvement n'est pas uniforme quoique leur lit soit régulier à pente constante..... 301

(3) *Questions du premier ordre dans les courants à lit irrégulier et à pente variée*..... 302

142 Quand on veut résoudre différentes questions relatives à un courant, il est nécessaire que le lit de ce courant soit complétement défini..... 302
143 La solution des questions du premier ordre sur les courants à pente variée dépend de cinq quantités sur lesquelles il suffit d'en connaître deux. Solution générale de ces questions. 303
144 Les questions les plus importantes sont celles qui ont pour objet de déterminer la pente lorsque le débit est connu, et réciproquement le débit lorsque la pente est connue..... 308
145 Lorsque l'on connaît les aires et la forme des sections d'un courant, ainsi que la pente de son lit, le débit peut toujours se déterminer avec précision..... 309
146 Des différents modes de calculs qu'il paraît possible d'adopter pour trouver le débit d'un courant et de celui qu'il convient de préférer ; ce que l'on doit entendre par la norme d'un courant. 311
147 De la formule dont les ingénieurs italiens font usage pour calculer le débit du Pô..... 314
148 De la courbure qu'affecte, dans le sens transversal, la surface d'un courant..... 316
149 Norme et débit du Weser déterminée par la formule..... 318
150 Pente d'une petite partie de la Dordogne déterminée par le

calcul, pente du Weser, pente de l'Elbe, pente de la Saône, pente de la Moselle..... 319
151 Détermination de la pente de l'axe hydraulique, lorsque l'on connait un point de cet axe et le débit du courant..... 321
152 Première application numérique de la question du numéro précédent..... 323
153 Deuxième application numérique relative à la question du n° 151, lorsque le fond du courant est horizontal..... 326

(4) *Questions du deuxième ordre relatives aux courants permanents et découverts à lit régulier ou irrégulier*..... 329

154 Des altérations ou modifications que peut éprouver le lit d'un courant..... 329

§ 1. Effets des altérations graduelles qu'éprouve, sur peu de longueur, le lit d'un courant..... 332

155 Des diverses modifications graduelles du lit d'un courant... 332
156 Effets des modifications graduelles..... 333
157 Du raccordement de l'axe hydraulique qui résulte de la modification avec l'axe hydraulique primitif..... 336
158 Application numérique relative à l'effet produit par un élargissement de section..... 337
159 De la hauteur de la section modifiée dans le cas d'un rétrécissement..... 339
160 Dans les courants naturels les relèvements et abaissements qui résultent de modifications graduelles sont rarement sensibles. 340

§ 2. Effets des altérations graduelles qu'éprouve sur une grande longueur, la section d'un courant..... 341

161 Première question générale à résoudre..... 341
162 Deuxième question générale..... 344

§ 3. Effet d'un élargissement brusque de la section d'un courant. 347

163 Hauteur du relèvement de la surface d'un courant, lorsque la vitesse est brusquement réduite..... 347
164 Application numérique. — Relèvement causé par un brusque élargissement de section..... 349

§ 4. Effets de la réduction, plus ou moins brusque, de l'aire de la section d'un courant..... 351

165 La réduction brusque de l'aire de la section d'un courant

produit une seconde réduction occasionnée par la convergence des filets..... 351
166 Des différentes parties que peut présenter un relèvement.. 352
167 Détermination de l'amplitude ou de la hauteur d'un relèvement..... 354
168 Observation relative à la solution des équations du numéro précédent..... 357
169 La théorie exposée dans les numéros précédents convient à toute réduction de l'aire d'une section qu'elle qu'en soit la cause. 358
§ 5. Des réductions de section par diminution de largeur.... 359
170 Toute réduction dans la largeur de la section d'un courant produit un relèvement en amont de cette section..... 359
171 Le relèvement en amont de la section réduite est toujours suivi d'un abaissement dans l'emplacement même de cette section. 360
172 De la moindre largeur à donner à la section modifiée pour que, lors du débit d'un volume déterminé, le niveau de l'eau d'amont ne dépasse pas un niveau fixé à priori..... 362
173 Lorsque la hauteur de la chute ou cataracte est fixée à priori, la condition du maximum n'est pas toujours susceptible d'être remplie..... 364
174 Observations faites au pont de Minden, sur le Weser, qui se trouvent consignées dans l'hydrotechnie de Funck..... 365
175 Applications numériques..... 368
176 Largeur à donner à la section pour que la chute ou cataracte ne dépasse pas une hauteur fixée à priori..... 373
§ 6. Des réductions de section par le relèvement du fond d'un courant..... 376
177 Des barrages, déversoirs ou épanchoirs..... 376
178 Hauteur du relèvement causé par un barrage..... 376
179 Hauteur du niveau de l'eau d'amont au-dessus du seuil d'un épanchoir..... 379
180 Lorsqu'on connaît trois des quatre quantités, le débit, la hauteur du barrage, sa largeur et la hauteur de l'eau d'amont, on détermine facilement la quatrième..... 379
181 Mesure du débit à son passage sur les barrages et déversoirs. 381
182 Circonstance dans laquelle le débit qui a lieu par le débouché que présente un barrage, ou la hauteur du relèvement occasionné par ce barrage, dépend de la hauteur des eaux d'aval. 383

183 De l'amplitude des relèvements, de leur hauteur absolue, et de leur hauteur relative..... 385
184 Des relèvements, par réduction de vitesse qui se manifestent à l'aval des barrages..... 388
185 Applications numériques..... 389
186 Question traitée par MM. de Prony et Vauthier..... 394

**§ 7. Effets causés par un changement brusque dans la pente du fond ou de la superficie d'un courant..... 400**

187 Des relèvements par réduction de vitesse; détermination de leur hauteur..... 400
188 Expérience de Bidone relative à un relèvement par réduction de vitesse..... 403

(5) *Des courants naturels*..... 404

189 Le lit des courants naturels n'est pas d'une forme invariable; les sables et graviers chariés par les eaux tendent à modifier cette forme..... 404
190 Du régime des rivières..... 407
191 Des moyens d'apprécier la résistance dans un courant dont les eaux charient du sable et des graviers..... 409
192 La grosseur des matières entraînées par les courants, varie avec leur vitesse..... 411
193 Des différents modes de transports des matières entraînées par les courants..... 412
194 Relation entre la vitesse de l'eau et la grosseur des matières qui sont entraînées en glissant sur le fond du lit des courants. 414
195 Résultats de quelques observations de Dubuat et de MM. Telford et Nimmo sur la grosseur des matières entraînées à différentes vitesses..... 417
196 Relation entre la vitesse et la grosseur des matières soulevées, soutenues et entraînées par les courants..... 419

LIVRE III. — *Mouvement permanent de l'eau dans les courants couverts ou fermés.*

197 Equation du mouvement permanent d'un liquide dans un courant couvert ou fermé, telle qu'elle résulte de l'application du principe des forces vives..... 423
198 Equations différentielles de la ligne des centres, de celle des pressions et de celle des résistances; équations aux différences

des mêmes lignes, conséquences qu'il est facile de déduire des unes et des autres..... 426
199 Des conduites simples et des systèmes de conduits. Pressions que les conduites éprouvent; formules qui en donnent la valeur; instruments qui servent à les mesurer..... 431
200 Considérations générales sur le mouvement de l'eau dans les conduites simples..... 433
201 Expression de la hauteur perdue en résistance dans une conduite dont l'axe est rectiligne..... 435
202 Pertes de hauteur, dues aux variations de l'aire des sections d'une conduite..... 438
203 Pertes de hauteur, dues aux changements de direction de l'axe d'une conduite..... 443
204 Equation du mouvement dans une conduite établissant une communication entre deux réservoirs..... 444
205 Pression que supporte un point quelconque d'une conduite. 447
206 Circonstances dans lesquelles le liquide ne coule pas à pleine section..... 450
207 Solutions générales des questions auxquelles peut donner lieu le mouvement uniforme de l'eau dans une conduite à section circulaire..... 451
208 Applications numériques relatives de mouvement uniforme de l'eau dans les conduites..... 454
209 Pression qui doit avoir lieu aux différents points de prises d'eau pour que le débit par les orifices correspondants soit assuré. 456
210 Pertes de hauteur causées par le branchement des conduites. 457
211 Distribution d'eau au moyen d'une conduite simple..... 459
212 Distribution d'eau au moyen d'un système de conduites.... 461
213 Indications générales pour faciliter l'étude d'un projet de distribution pour les besoins d'une ville..... 462
214 Valeurs de $\sqrt{D^5}$ obtenues par les formules de Prony et par celle que nous préférons; comparaison de ces valeurs..... 464
215 Détermination du diamètre des tuyaux d'un système de conduites; rapport qui doit toujours exister entre les diamètres de deux conduites de ce système..... 465

LIVRE IV. — *Ecoulement de l'eau par des ouvertures, telles qu'orifices, vannes, pertuis, ponts, déversoirs.*

216 Du mouvement de l'eau à sa sortie d'un réservoir..... 469

217 De la contraction de la veine fluide..... 470
218 Effets de la contraction..... 472
219 Forme de la veine..... 474
220 Effets des ajutages..... 475
221 Contraction incomplète..... 476
222 Théorie de la contraction..... 477
223 Rapport entre l'aire de l'orifice et celle de la section contractée, lorsque l'écoulement a lieu par un petit tuyau pénétrant dans l'intérieur du réservoir..... 481
224 Rapport entre l'aire de l'orifice et celle de la section contractée, lorsque l'orifice est percé dans une paroi plane et mince. 482
225 Valeur du coefficient *m* lorsque la paroi est conique..... 485
226 Valeur du coefficient *m* dans diverses autres circonstances. 486
227 Circonstances particulières dans lesquelles on obtient immédiatement la valeur du coefficient *m*..... 489
228 Augmentation que doit éprouver la valeur du coefficient *m*, lorsque la charge sur le contour de l'orifice vient à diminuer. 495
229 Moyen de déterminer par le calcul, la valeur du coefficient *m*, lorsque la charge sur le centre de l'orifice est moindre que la moitié du diamètre..... 496
230 De la hauteur due à la vitesse moyenne, dans un orifice vertical rectangulaire et dans un orifice vertical circulaire.... 499
231 Du pouce du fontainier et du volume qu'il représente..... 502
232 De l'effet des coursiers sur les débits; 1° lorsque la charge est considérable; 2° lorsque la charge est faible..... 504
233 De l'écoulement par un orifice ouvert à sa partie supérieure, ou lorsque l'eau coule en déversoir..... 505
234 Des débits par les déversoirs..... 507
235 Valeur du coefficient *m* lorsque l'eau coule en déversoir... 508
236 Influence qu'exerce sur la valeur du coefficient *m*, le rapport $\frac{l}{L}$ de la largeur du déversoir à celle du lit du courant.... 510
237 Exactitude de la formule du débit par les déversoirs, confirmée par les résultats des expériences de MM. Poncelet et Lesbros. 511
238 De la hauteur de la charge, lorsque l'eau coule en déversoir. 513

SECTION II. — *Récepteurs ou moteurs hydrauliques.*

*I. Considérations générales*..... 515
239 Considérations générales sur les moteurs et les machines.. 515
240 De la puissance absolue du moteur..... 516

241 De la puissance relative du moteur ou de la plus grande quantité d'action que ce moteur puisse transmettre dans des circonstances determinées..... 517
242 De la plus grande quantité d'action qu'un récepteur puisse recueillir dans des circonstances données..... 519
*II. Roues verticales*..... 520
243 Des roues verticales..... 520
244 Des roues à aubes planes, dites roues en dessous..... 521
245 Des roues dites suspendues, qui sont mues par l'action de l'eau d'un courant à grande largeur..... 524
246 Roues à coursier circulaire, dites roues de côté..... 526
247 Roues à augets..... 527
248 Roues verticales à aubes courbes..... 529
*III. Roues horizontales*..... 530
249 Des roues horizontales et des turbines..... 530
250 Roues horizontales à palettes, mues par le choc de l'eau... 531
251 Roues horizontales à surfaces héliçoïdes, dites roues d'Euler. 532
252 Roues horizontales dites à réaction, dans lesquelles l'eau entre suivant l'axe et s'échappe par des orifices verticaux situés à une même distance de l'axe..... 535
253 Roues horizontales, dites danaïdes, dans lesquelles l'eau descend en s'approchant de l'axe..... 538
254 Roues horizontales à aubes cylindriques et verticales, dites turbines Fourneyron..... 540

## APPENDICE.

I. Détermination de la valeur numérique du coefficient *a* qui entre dans l'équation du mouvement uniforme de l'eau dans les courants découverts..... 549
II. Détermination de la valeur numérique du coefficient *b* qui entre dans l'équation du mouvement uniforme de l'eau dans les tuyaux de conduite..... 555
III. Calcul du débit ou de la pente des courants..... 559
1. Application relative au Weser..... 560
2. Id. à l'Elbe..... 570
3. Id. à la Saône..... 575
4. Id. à la Moselle..... 578
IV. Table pour faciliter l'application des formules d'hydraulique. 579
V. Supplément au n° 224, sur la détermination du coefficient de réduction *m* relatif à l'écoulement par un orifice percé dans une paroi plane et mince..... 582

## INDICATIONS RELATIVES AUX FIGURES.

### INTRODUCTION.

Fig. 1re Plan d'un torrent { AA. BB.

2 Profil d'un torrent.

3 Plan du bassin de la Loire, présentant les attitudes de différents points des faîtes et des vallées.

4 Tableau graphique des variations de la hauteur de la Seine, pendant l'année 1834; sur la ligne horizontale sont indiqués les jours ou les intervalles entre les observations.

5 Profil général de l'Yonne et de la Seine.

6 Section transversale d'une rivière.

7 Profil de l'axe hydraulique et du fond d'une rivière à fond de gravier, pendant l'étiage.

8 Delta du Rhône, ou progrès des dépôts qui se forment à l'embouchure de ce fleuve.

9 Barrage mobile à portes busquées pour les moyennes rivières flottables et même navigables.

10 Barrage mobile à poutrelle pour les rivières à retenues, afin de prévenir les débordements nuisibles.

### HYDRAULIQUE.

11 Canal dans lequel se meut une masse liquide continue.

12 Rectangle faisant connaître la hauteur perdue en résistance, sur un courant quelconque.

13 Canal présentant un élargissement brusque de section.

14 Pente absolue des lignes à faible courbure.

15 Mesures de la surface comprise entre une droite et une courbe.

16 Courbe de la variation des vitesses de différents points situés sur une même verticale.

17 Ligne des résistances dans les courants découverts.

18 Lignes des résistances, de la surface et des vitesses, dans les courants découverts.

19 Forme de l'axe hydraulique observée par Bidone.

20 Ligne des résistances et ligne des pressions dans les tuyaux de conduite.

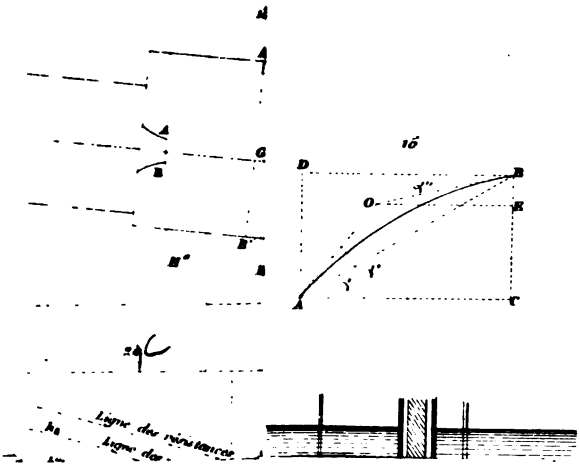
21 Conduite avec un élargissement brusque et rétrécissement graduel.

22 Conduite avec élargissement et rétrécissement brusque.
23 Platine percée d'un orifice et placée sur l'axe d'une conduite.
24 Conduite établissant une communication entre deux réservoirs.
25 Mouvement de l'eau dans une conduite se subdivisant en deux autres.
26 Ecoulement par un tuyau très-court pénétrant dans l'intérieur d'un vase.
27 Orifice percé dans une paroi plane et mince.
28 Ecoulement par un très-petit orifice.
29 Ecoulement par un ajutage cylindrique très-court et extérieur au vase.
30 Ecoulement par des orifices et sous une charge moindre que le diamètre de ces orifices.
31 Ecoulement par un déversoir dont le seuil est inférieur au niveau des eaux d'aval.
32 Roue verticale à aubes planes.
33 Roue pendante sur bateaux.
34 Roue verticale à coursier circulaire dite roue de côté.
35 Roue verticale à augets.
36 Roue verticale à aubes courbes.
37 Roue horizontale à palettte.
38 Roue horizontale dans laquelle l'eau se meut en restant à une distance constante de l'axe.
39 Roue horizontale, dite roue à réaction.
40 Roue horizontale dans laquelle l'eau se meut en s'approchant du centre.
41 Roue horizontale dans laquelle l'eau se meut en s'éloignant du centre.

FIN DE LA TABLE.

TYPOGRAPHIE SCIENTIFIQUE ET ORIENTALE DE Ve DONDEY-DUPRÉ,
46, rue Saint-Louis, au Marais.

JK


16
D
B
O
E
A
C
Ligne des résistances
Ligne des

| Material | |
|---|---|
| Vellum | Traité de matériaux |
| Lib. Buck. 16 | |
| Duck | |
| ½ T. Mor. | |
| ½ Pigskin | |
| Imp. Mor. Clo. | |
| **Color** | Coates |
| Black | |
| Dark Blue | |
| Light Blue | 2 |
| Dark Brown | |
| Light Brown | |
| Dark Green | |
| Light Green | |
| Olive | |
| Maroon | |
| Red | VFM |
| **Pattern** | |
| As before | 1 Sec |

Remarks:

B'D. JAN 17 1913

DEC 13 1912

form 208 [1x-10-12 15m]